# Guía didáctica para el aprendizaje de la factorización en estudiantes del CLEI IV del ITM

Martha Eugenia Ospina Sepúlveda

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Colombia

Sede Medellín

2015

# Guía didáctica para el aprendizaje de la factorización en estudiantes del CLEI IV del ITM

Martha Eugenia Ospina Sepúlveda

Trabajo final de maestría presentado como requisito parcial para optar al título de: **Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales**

Director (a):

Doctor en Educación Matemática. René Alejandro Londoño Cano

Línea de Investigación:
Estudio de Casos

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Medellín, Colombia
2015

*Este trabajo está dedicado a todos los amantes de las Matemáticas, en especial a los maestros que todos los días hacen patria.*

**Agradecimientos**

Al creador por darme esta oportunidad y a  todas las personas que hicieron posible el desarrollo de este proyecto. En especial al asesor: Doctor René Alejandro Londoño Cano y al Magíster Fabio Alexánder Cortés Garcés.

# Tabla de contenido

## Lista de gráficas

## Lista de ilustraciones

**Resumen**

Esta propuesta de trabajo se fundamenta en el aspecto de la resolución de problemas relacionados con el aprendizaje significativo del álgebra, ella contiene un marco teórico que aborda los elementos curriculares, temáticos y didácticos; se hace énfasis en la importancia de los materiales manipulativos para el diseño de una propuesta didáctica, como una alternativa estratégica que permita abordar los conceptos algebraicos, relacionados con los casos de factorización y que contribuya a los procesos de enseñanza y aprendizaje. El objetivo principal del proyecto es que los estudiantes del CLEI IV del ITM Campus Castilla aprendan a factorizar valiéndose del álgebra geométrica utilizando para ello rectángulos y cuadrados.

Otro propósito es demostrar que los conceptos abstractos relacionados con el aprendizaje del álgebra se pueden aprehender más fácilmente utilizando material didáctico en las intervenciones pedagógicas.

Palabras clave:

Aprendizaje del álgebra, aprendizaje significativo, guía didáctica, materiales manipulativos, álgebra geométrica, fatorización, material didáctico.

**Abstract**

This proposed work is based on the appearance of solving problems related to learning algebra, it contains a theoretical framework addressing the curricles, thematic and didactic elements; emphasis on the importance of manipulative materials for the design of a didactic, as a strategic alternative that will address the algebraic concepts related cases factoring and contribute to the teaching and learning meaningful.

The main objective of the project is that students of the ITM Campus IV CLEI Castilla learn to factor making use of geometric algebra using rectangles and squares. Another purpose is to demonstrate that abstract concepts related to learning algebra can apprehend easier to use teaching materials in teaching pedagogical interventions.

## Introducción

Para la enseñanza de las matemáticas podemos valernos de algunos recursos didácticos; en este sentido, se propone la elaboración de una guía didáctica para el aprendizaje de la factorización que conlleve a obtener mejores resultados en la aprehensión de los algoritmos y conceptos involucrados. En el presente estudio se hace un análisis respecto a la dificultad que presentan los estudiantes del CLEI IV del Instituto Tecnológico Metropolitano (ITM) Campus Castilla a la hora de factorizar una expresión algebraica. Se pudo notar que muchos de ellos han olvidado los conceptos necesarios para factorizar una expresión, además que las prácticas de aula realizadas por los docentes suelen ser orientadas a la repetición de algunos procesos mecánicos.

Para el diseño de la guía didáctica se tiene como mediador el álgebra geométrica, la cual nos permite un mejor aprendizaje dado que le proporciona al estudiante nuevos procesos de razonamiento a la hora de factorizar una expresión algebraica. Los recursos didácticos que facilitan el aprendizaje utilizados en esta propuesta, deben ir de la mano de herramientas teóricas tales como, la teoría del aprendizaje significativo (Ausubel, 1978), que permite la aplicación de una guía didáctica[1] adecuada para los intereses de una población particular, como lo es la del CLEI IV del ITM campus Castilla. Dado lo anterior, se pretende diseñar una guía didáctica enfocada en el aprendizaje significativo de la factorización que se fundamenta en un marco teórico que aborda elementos curriculares, matemáticos y didácticos, y que hace énfasis en la importancia de los materiales concretos.

Es importante recordar que no todos los grupos de estudio tienen las mismas características y necesidades, lo que puede ser un factor importante para el desarrollo de las actividades planteadas. Los estudiantes del CLEI IV ITM del Campus Castilla son jóvenes extra edad, con dificultades de tipo cognitivo y comportamental; algunos de ellos han repetido el grado octavo varias veces. El objetivo de culminar los estudios en esta modalidad para la mayoría de ellos, es

---

[1] Se resume que las guías didácticas están relacionadas y fundamentadas por las teorías constructivistas, siempre y cuando para su confección se consideren los conocimientos previos (esquemas), la zona de desarrollo próximo a través de la solución de problemas guiada por el profesor (tarea docente) o en colaboración con sus compañeros (trabajo grupal) y mientras exista una relación directa entre el nuevo conocimiento a adquirir y los que ya posee el estudiante (aprendizaje significativo) (Rev.edumecentro vol.6 no.3 Santa Clara sep.-dic. 2014).

acceder al mercado laboral; sólo unos pocos continuarán su proceso académico a nivel universitario.

A continuación, se describen los cuatro capítulos que conforman este trabajo:

En el primer capítulo se referencia la presentación del problema, se dan a conocer el objetivo general y los objetivos específicos, la justificación del trabajo a desarrollar y por último algunos antecedentes que se tuvieron en cuenta como referentes para el diseño de la guía didáctica.

En el segundo capítulo se presentan los soportes teóricos que fundamentan la propuesta del trabajo final de maestría, entre ellos se hace referencia a: teorías del aprendizaje, estrategias didácticas, marco disciplinar, marco legal y algunas generalidades de la institución donde se aplicó la estrategia didáctica.

En el tercer capítulo se presenta el diseño metodológico y la estrategia didáctica que se propone para abordar el tema de la factorización en el CLEI IV del ITM. Comprende el objetivo general del proyecto, los logros y estándares propuestos en la institución, específicamente del área de matemáticas.

Los pensamientos implícitos en la guía didáctica son: Pensamiento espacial y sistemas geométricos, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, pensamiento numérico.

La guía didáctica que se desarrolla en el presente estudio se hizo en cuatro momentos, así:

- Primer momento: Análisis de la población o muestra con la que se trabajó, por medio de encuestas para conocer las dificultades que tenían con la factorización.
- Segundo momento: Se realizan varias actividades a través de guías para saber cuáles eran los conceptos previos necesarios para el aprendizaje de la factorización.
- Tercer momento: Se desarrollan las actividades propuestas para la aplicación de la guía.
- Cuarto momento: Se hace la evaluación y análisis de resultados.

En el cuarto capítulo se presenta el análisis de los tres casos que se escogieron, en el cual se puede verificar si se pudo alcanzar un aprendizaje significativo de la factorización de una expresión algebraica con la ayuda del álgebra geométrica.

# Capítulo 1

# Aspectos Preliminares

En este capítulo se muestra una breve reseña de la Institución Educativa donde se va a aplicar la guía didáctica.  Luego, se relacionan la pregunta investigativa, los objetivos, la metodología, las actividades que se van a desarrollar en el proyecto y, por último, algunos antecedentes que se tuvieron en cuenta como referentes para el diseño de la guía didáctica.

## 1.1 Tema

Con el ánimo de plantear una alternativa de solución a la problemática que se presenta con los estudiantes del CLEI IV del ITM Campus Castilla en el área de matemáticas, específicamente en la interpretación del álgebra, se presenta una propuesta haciendo uso del álgebra geométrica como mediador didáctico, permitiendo  en los estudiantes el aprendizaje de la factorización, donde a partir de la modelación matemática[2] se pasa del pensamiento geométrico al pensamiento algebraico.

## 1.2 Problema de Investigación

### 1.2.1 Antecedentes

[2] Llamamos simplemente modelo matemático, a un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación. (Villa Ochoa, Bustamante Quintero, Berrio Arboleda, Osorio Castaño, & Ocampo Bedoya, julio)

A partir del presente trabajo, el cual propone la implementación de una guía didáctica enmarcada en la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, para la comprensión de la factorización usando materiales concretos, podemos citar varios trabajos relacionados con el problema de investigación. También se enumeran algunos aspectos preliminares, características principales y algunas de sus limitaciones.

Algunas de las investigaciones que contribuyeron como punto de partida para la realización del presente trabajo, se enuncian a continuación.

### 1.2.2 Antecedentes de trabajos con uso de material didáctico.

**Uso de material estructurado como herramienta didáctica para el aprendizaje de las matemáticas.**

Propone una estrategia de recursos y materiales didácticos que facilitan las experiencias individuales que nos llevan a un aprendizaje; propone una colección de materiales en el aula de matemáticas y afirma que el recurso didáctico en el aula es de gran ayuda para facilitar el aprendizaje, aumentando la motivación y participación de los estudiantes. (Velasco Esteban, 2012)

**Uso de materiales didácticos manipulativos para la enseñanza y aprendizaje de la geometría.**

Estos autores justifican el uso de los materiales manipulativos para la enseñanza de las matemáticas y cómo éstos ayudan a un mejor aprendizaje y a un trabajo en el aula más agradable y significativo. “El papel de lo concreto en la matemática”, representa algo sustancial en su función educativa. Estructurado en forma de modelo, este material que se presenta abundantemente en la exposición, tiene la función de traducir ideas matemáticas, originarlas y sugerirlas. Se estudiará la mejor forma de llevarlas al aula, ya que la percepción y la acción son fundamentales en la educación matemática (Puig, 1958). A partir de este encuentro, durante los años 1950 a 1970 hubo una difusión de los materiales manipulativos estructurados. Por tanto, algunos materiales difundidos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas fueron: las regletas Cuisenarie, pentominós de Golomb, geoplano de Gategno, bloques lógicos y bloques multibase de Dienes, entre otros (Valenzuela, 2012).

### 1.2.3 Antecedentes de trabajos en la enseñanza del álgebra o la factorización.

El trabajo hace referencia al modelo de área en la enseñanza a través del trabajo del Dr. Zoltán Dienes en colaboración con Dr. Jerome Bruner, a partir de un proyecto realizado con estudiantes de la escuela básica entre los 5 y los 13 años de edad, cuyo objetivo es la enseñanza de estructuras matemáticas apoyándose en el uso de manipulativos especialmente diseñados, con los cuales se busca representar en lo más puramente posible los conceptos matemáticos y lógicos que se consideran pueden ser estudiados en esas edades. (Covas & Bressan, 2011).

Dienes introduce materiales y juegos variados para las ideas lógicas y matemáticas. Entre los primeros materiales están los bloques aritméticos multibase (BAM o bloques Dienes). Estos también son utilizados para la enseñanza del álgebra, permitiendo así la materialización de expresiones cuadráticas, y la representación de procesos de factorización.

**Productos notables, factorización y ecuaciones de segundo grado con una incógnita, una propuesta didáctica para el bachillerato del colegio de ciencias y humanidades.**

Propone un diseño didáctico sobre la enseñanza de las matemáticas, con respecto a los temas de productos notables, factorización y ecuaciones de segundo grado con una incógnita para encontrar la manera de reducir el índice de reprobación, tomando como base el programa de estudios de Matemáticas de México. Se trata de una fundamentación donde la docencia se caracteriza entre la interacción profesor - estudiante, ya que se considera que el proceso de comunicación es interactivo y el estudiante también emite mensajes hacia el profesor

En este sentido, el diseño que propone lo hace mediante el uso de pruebas estadísticas, para demostrar que el resultado de aplicar un instrumento diagnóstico (examen) a un grupo de estudiantes sin la exposición de cierto material didáctico, es menor a los resultados que se obtienen al aplicar el mismo examen, pero con el conocimiento del material didáctico (López, 2008).

**El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado**.

Se hace alusión a las dificultades que presentan los estudiantes para la comprensión del lenguaje algebraico. También nos explica como en la enseñanza del álgebra, primero se desarrolla la expresión y luego se representa en forma geométrica, recurriendo a los postulados del libro II de los Elementos de Euclides (Euclides, Elementos, Libro II, 1991).

A partir del álgebra geométrica como recurso didáctico y ambientación a diferentes temas, creemos que se pueden mejorar estos procesos de aprendizaje (Ballén Novoa , 2012)

### 1.2.4 Antecedentes de trabajos en el marco de la teoría del aprendizaje significativo

**Motivación, Aprendizaje Significativo, y Rendimiento en Matemáticas a través de las TIC-Investigación en los estudiantes del grado séptimo de La Inmaculada Concepción.**

Se puede lograr un aprendizaje significativo de las matemáticas, si se mantiene a los estudiantes motivados y si utilizamos los materiales adecuados como son los recursos didácticos o guías. Este es un asunto del que es garante el maestro.

También es una preocupación en todas las instituciones educativas porque el área de matemáticas es donde más reprobación académica hay, como lo expone Sandro David Melo Sánchez (2006), el autor propone unas unidades didácticas interactivas para mejorar el rendimiento en el área de matemáticas y también para que las clases sean más amenas y se pueda tener un aprendizaje significativo.

Existe una verdadera motivación impartida por parte de los docentes hacia sus estudiantes, según lo expuesto por Rodríguez Moneo y Huertas (2004) (citado por Dapía, s.f); afirman que esta motivación radica en determinar metas que sean reales y que se puedan alcanzar, teniendo un grado de dificultad que se ajuste al nivel de habilidad del estudiante, donde el papel del docente será de orientador y colaborador, presentando los contenidos de la manera más atractiva posible, acudiendo a los materiales didácticos más efectivos, con situaciones problemas de la vida cotidiana, factibles al entendimiento del estudiante, partiendo de los conocimientos previos que posee; sin olvidar que el verdadero protagonista del proceso de aprendizaje es el estudiante. Las dificultades de aprendizaje, derivadas de falta de prerrequisitos, o de desconocimiento de estrategias de estudio adecuadas, en ocasiones se interpretan erróneamente, aduciendo una falta de motivación (Rodríguez Moneo & Huertas, 2000).

**Una propuesta para el aprendizaje significativo de los estudiantes de la escuela San José La Salle, de la ciudad de Guayaquil**.

Este trabajo nos presenta diferentes teorías del aprendizaje como el conductismo y el constructivismo, pero nos interesan los postulados de la "*teoría del aprendizaje por asimilación"* de David Ausubel, donde se contemplan los principios para alcanzar un aprendizaje significativo y el papel que juega en este aprendizaje el subsumidor.

El aprendizaje significativo como proceso, presupone que el estudiante adopte una actitud de querer aprender y que el contenido que aprende sea potencialmente significativo para él, es decir, que sea enlazable con ideas de anclaje previas en su estructura cognitiva y que explique cómo se hace necesario que los docentes de la institución empiecen a comprender y a utilizar esta teoría en los procesos de enseñanza (Cobo Granda , 2008)

### 1.3 Pregunta de investigación

Al encontrar algunos vacíos conceptuales en el aprendizaje del álgebra de los estudiantes del CLEI IV, nace la siguiente pregunta: ¿Cómo propiciar el aprendizaje de la factorización, mediante el diseño de una guía didáctica en el marco de la teoría del aprendizaje significativo?

### 1.4 Descripción del problema

El problema fundamental de los procesos de aprendizaje del álgebra en la educación básica, radica en el énfasis que se da a lo formal y deductivo. Este es presentado en forma fría, abstracta y descontextualizada, asunto que además de desmotivar a los estudiantes los lleva a limitar su creatividad, a memorizar conceptos y procedimientos, sin comprender su significado ni establecer relaciones entre ellos, dejando a un lado la demostración geométrica

Por esto, se plantea una alternativa de solución a la problemática que se presenta con los estudiantes del CLEI IV del ITM Campus Castilla, a la hora de factorizar expresiones algebraicas. Así, se diseña una propuesta didáctica utilizando el álgebra geométrica, mediante la construcción de algunas formas geométricas como cuadrados, rectángulos y algunas unidades cuadradas con las que se hallan áreas, perímetros y volúmenes, permitiendo a los estudiantes un aprendizaje significativo de la factorización.

Dentro del quehacer pedagógico, es necesario proponer nuevas alternativas que posibiliten el mejoramiento de los procesos de aprendizaje en los estudiantes, que los lleve a despertar el interés por las matemáticas y apropiarse del conocimiento, convirtiéndolos en un verdadero aprendizaje.

## 1.5 Justificación del problema

La pertinencia del presente trabajo, se da por la predisposición que presentan los estudiantes, al mencionar la palabra factorizar, es para ellos algo muy difícil y frustrante, dado que, el solo hecho de trabajar con números y letras les horroriza. Esto da origen a la implementación de una nueva metodología que motive a los estudiantes a tener un aprendizaje significativo de la factorización.

## 1.6 Descripción de la población.

Se propone trabajar la factorización utilizando rectángulos y cuadrados, a la vez, poner en práctica los postulados de Ausubel sobre el aprendizaje significativo. Por ello, se aplicará el aprendizaje por asimilación, entendido como el proceso mediante el cual "la nueva información es vinculada con aspectos relevantes y preexistentes en la estructura cognoscitiva, proceso en que se modifica la información recientemente adquirida y la estructura preexistente" (Ausubel, 1983. 71), al respecto, Ausubel recalca: "Este proceso de interacción modifica tanto el significado de la nueva información como el significado del concepto o proposición al cual está afianzada." (Ausubel, 1983. 120)

Otro de los grandes retos es, cómo enseñar a factorizar a un grupo de estudiantes que nada les motiva y que además tienen grandes dificultades de aprendizaje, de comportamiento y de orden sociocultural (población adulta y vulnerable) donde su único propósito es graduarse para buscar o conservar su trabajo.

Algunos de ellos están terminando sus estudios para continuar con los superiores, pero la mayoría lo están haciendo porque en sus hogares se lo exigen para que empiecen una vida laboral productiva, porque muchos de los estudiantes son madres o padres cabeza de hogar, lo que los obliga a aportar económicamente para el sustento de sus hijos.

Dentro del grupo de estudiantes hay algunos con dificultades de seguridad en sus barrios (barreras invisibles)[3] y acuden a esta modalidad de educación (CLEI) por que les favorece la intensidad horaria.

Otros lo hacen como un reto personal, solo quieren tener la satisfacción de terminar sus estudios básicos y obtener el diploma de bachiller.

Otros tienen problemas de *"adicción"* a drogas psicoactivas, donde algunos están en tratamiento y otros no. Ésta es la población que más dificultades presenta en los procesos de aprendizaje, en especial en el área de matemáticas y lo más relevante es que muchos han repetido el grado octavo varias veces en otras instituciones.

También se pretende con esta propuesta, motivar el aprendizaje de la factorización, por parte de los estudiantes, teniendo en cuanta su contexto y su problemática.

## 1.7 Objetivo General

Diseñar una guía didáctica para el aprendizaje de la factorización, en el marco de las teorías del aprendizaje significativo.

## 1.8 Objetivos Específicos

- Realizar una prueba diagnóstica sobre conceptos previos, apuntando al pensamiento variacional.
- Evaluar el uso de figuras geométricas tales como rectángulos y cuadrados para el aprendizaje de la factorización, como un mediador didáctico.

[3] Las barreras invisibles se dan en los barrios de la ciudad, cuando hay enfrentamientos entre los diferentes bandos y donde los ciudadanos no pueden pasar de un lado a otro en estos sectores.

# Capítulo 2

# Marco Referencial

## 2.1 Marco Teórico

Esta sección del trabajo de investigación presenta los soportes teóricos que fundamentan la propuesta de trabajo final de maestría, entre ellos, se hace referencia a:

- Aprendizaje significativo.
- Construcción del conocimiento.
- Estrategias didácticas.
- Marco disciplinar, legal.
- Institución donde se aplicó la estrategia didáctica.

## 2.2 Teorías del aprendizaje

Según algunas teorías del aprendizaje de las ciencias, se han desarrollado trabajos que nos orientan a una mejor comprensión de los conceptos. Para el aprendizaje de las matemáticas son múltiples las formas en las que se puede implementar nuevas estrategias que faciliten la apropiación de los saberes por parte del estudiante, una de estas estrategias es el uso de guías didácticas, las cuales están diseñadas para que los estudiantes se motiven por el aprendizaje de un concepto matemático.

En la aplicación de la guía didáctica la cual está enmarcada en la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, se pretende mediante una enseñanza constructivista, promover un cambio conceptual y facilitar la comprensión de la factorización usando la geometría algebraica.

> *"Lo que se quiere decir es que puede no haber habido, aún, un verdadero cambio conceptual en este sentido, pero parece que se está caminando en esa dirección". (Moreira, 1993)*

Piaget, menciona cómo los procesos del pensamiento se dan cuando se usan los conocimientos previos de los estudiantes a la hora de abordar nuevos conceptos matemáticos, asi:

> *"que los esquemas son organizaciones del pensamiento derivadas de las propias actividades del aprendiente que puede sufrir modificaciones al combinarse con otros esquemas o pueden extenderse, ampliarse a razón de nuevas experiencias, generándose así el aprendizaje", (Piaget, 1956).*

En el proceso de aprendizaje, se deben tener presentes los conocimientos previos o subsumidores como lo llaman Ausubel y Moreira; este concepto es abordado por los docentes a la hora de enseñar, pero no lo hacen de una manera consciente. El subsumidor es necesario para que el estudiante obtenga un aprendizaje significativo. Si no se tiene, el proceso de aprendizaje será lento y con muchas dificultades.

El subsumidor en el tema de la factorización es necesario para resolver expresiones algebraicas, pues se deben tener conceptos claros como: operaciones con números enteros, potenciación, agrupación de términos, aplicación de teoremas, tener claro el concepto de área y de unidad cuadrada. Si los estudiantes no entienden estos temas, el docente está en la tarea de hacer una retroalimentación antes de empezar con la formalización de los conceptos involucrados.

## 2.3 La Construcción del Conocimiento

El constructivismo es una teoría que facilita el aprendizaje con la creación de significados a partir de experiencias. Concibe el aprendizaje como una actividad mental y fundamenta su propuesta en el hecho de que los estudiantes no transfieren el conocimiento del mundo externo hacia su memoria; más bien construyen interpretaciones personales del mundo basado en las experiencias e interacciones individuales (Ertmer & Newby, 1993).

Es así como, las representaciones que un estudiante tiene de la realidad no son las mismas, sino que éstas cambian constantemente. De hecho, Ausubel en su teoría del aprendizaje significativo, menciona como un estudiante cuando tiene un aprendizaje por asimilación, los conceptos o subsumidores son reestructurados, ya que estos conocimientos se dan en contextos que le son significativos.

## 2.4 El Aprendizaje Significativo

En la práctica pedagógica podemos observar que el desempeño de los estudiantes en el aprendizaje se efectúa por medio de una serie ordenada de etapas, las cuales nos orientan y nos dan pautas del avance o retroceso en el proceso de aprehensión que se lleva a cabo; en la propuesta se consideran varios aportes de Ausubel sobre los aprendizajes significativos.

Según Ausubel, un aprendizaje es significativo cuando los estudiantes relacionan los conocimientos que van a aprender con lo que ellos ya saben. Es decir, estas ideas se relacionan con algún aspecto existente y específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición (Ausubel, 1983, 18).

### 2.4.1 Subsumidor

Cuando un nuevo concepto se conecta con un nuevo saber, se dice que hay aprendizaje significativo; estos conceptos que el estudiante ya tiene formalizados en su estructura conceptual, se llaman **subsumidores**.

Esto implica que, las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de "anclaje" a las primeras. El subsumidor prácticamente no se modifica, la nueva información hace parte de esa estructura de conocimiento.

Para Moreira, el subsumidor es un concepto, una idea, una proposición ya existente en la estructura cognitiva, capaz de servir de "anclaje" para la nueva información de modo que esta adquiera así, significado para el individuo"(Moreira, 1993).

***¿Qué sucede cuando no hay subsumidores?***

Cuando los alumnos no disponen de los subsumidores adecuados y necesarios para anclar los nuevos conceptos de aprendizaje, es necesario desarrollarlos mediante los organizadores previos, que para nuestro trabajo son las guías diagnósticas; estos son materiales introductorios, presentados antes del propio material que llevará al estudiante a tener un aprendizaje del concepto matemático. Se espera con esto, manipular la estructura cognitiva con el fin de facilitar el aprendizaje significativo, y que sirva de puente entre lo que el aprendiz ya sabe y lo que él precisa saber. Los organizadores previos pueden ser discusiones, demostraciones, videos, experimentos, ejemplos cotidianos, etc. Esto dependerá del material que se desee impartir (ContactoS 31, 27-32 (1999) (Maria de la Paz Ramos Lara, 1999).

En el aprendizaje significativo se dan los siguientes principios:

- Asimilación
- Representacional
- De conceptos

En la construcción de la guía didáctica, sólo se considera el principio de asimilación y es por ello que nos enfocaremos en este:

*Principio de Asimilación*, el principio de asimilación se refiere a la interacción entre el nuevo material que será aprendido y la estructura cognoscitiva existente; esta origina una reorganización de los nuevos y antiguos significados para formar una estructura cognoscitiva diferenciada; esta interacción de la información nueva con las ideas pertinentes que existen en la estructura cognitiva propician su asimilación.

Por asimilación, entendemos el proceso mediante el cual "la nueva información es vinculada con aspectos relevantes y preexistentes en la estructura cognoscitiva, proceso en que se modifica la información recientemente adquirida y la estructura preexistente“ (Ausubel, 1983,71). Al respecto, Ausubel recalca: “Este proceso de interacción modifica tanto el significado de la nueva información como el significado del concepto o proposición al cual está afianzada” (Ausubel, 1983,120).

## 2.5 Estrategias Didácticas

Los docentes presentan diversas maneras para abordar y mostrar a los estudiantes las temáticas y contenidos de su materia.

Cada estrategia de enseñanza depende mucho del tema que se quiera enseñar, del contexto y lugar donde se aplica, además del objetivo que se desea alcanzar. Los maestros se valen de algunas herramientas didácticas para que el aprendizaje se logre, demostrando con ello que cada momento pedagógico es diferente y por ende su estrategia.

“El concepto de estrategias didácticas se involucra con la selección de actividades y practicas pedagógicas en diferentes momentos formativos, métodos y recursos en los procesos de aprendizaje.” (Velazco y Mosquera 2010)

En la definición de una estrategia, es importante tener clara la disposición de los estudiantes frente a su proceso de aprendizaje, su edad y por tanto, sus posibilidades de orden cognitivo.

La estrategia usada en la construcción de la guía didáctica fue:

1. Participación de los estudiantes, recortando el material para la aplicación de la guía.
2. El trabajo colaborativo del grupo.
3. Interpretación del lenguaje matemático al resolver una expresión algebraica.
4. Aplicación del álgebra geométrica en la factorización
5. El respeto por los compañeros en el desarrollo de las actividades propuestas.
6. Mantener la motivación de los estudiantes en el trabajo realizado en los espacios de conceptualización.

## 2.6 Marco Disciplinar

El aprendizaje de las matemáticas es necesario para que los estudiantes comprendan y analicen el medio que los rodea y así tener una mejor interacción con sus semejantes.

### 2.6.1 Naturaleza del Álgebra.

El término de álgebra geométrica fue utilizada por primera vez, por el matemático danés H. Gzeuthen y observó en las obras "secciones Cónicas" del geómetra griego Apolonio y "Los Elementos" de Euclides que las operaciones geométricas definidas sobre segmentos de rectas o áreas planas tienen las mismas propiedades de la adición y la multiplicación de números reales; en el álgebra geométrica trabajada por Euclides y Apolonio, la principal relación entre segmentos de rectas o entre áreas es la igualdad (dos polígonos son iguales si tienen áreas iguales); la noción de igualdad es un indefinido, sujeto a los siguientes axiomas:

Axioma 1; Iguales a lo mismo son iguales entre sí.

Axioma 2: Si iguales se adicionan a iguales, totales son iguales.

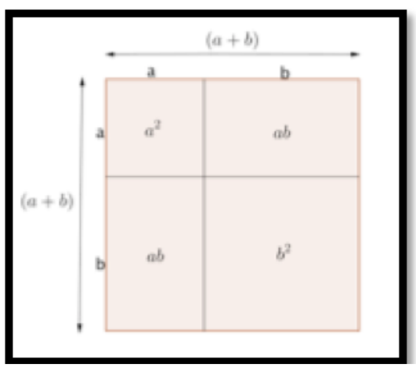
Axioma 3: Si iguales se sustraen de iguales, los restos son iguales.

Las tres operaciones fundamentales del álgebra geométrica están definidas de la siguiente manera:

- La suma de dos segmentos de recta $a,b$ es un segmento de recta $c$ que puede ser dividido en dos partes $a´$ y $b´$ que son iguales a $a$ y a $b$ respectivamente (Notación moderna $a+b=c$).
- La suma de dos polígonos $A,B$ es un polígono $C$ que puede ser dividido en dos partes $A´$ y $B´$ que son iguales a $A$ y $B$ respectivamente (Notación moderna $A+B=C$).
- El producto de dos segmentos de recta $a,b$ es un rectángulo $R$. (Notación moderna $a.b=R$) este producto es un objeto geométrico, no el resultado de una multiplicación entre enteros.

En tiempos de Euclides las magnitudes se representaban por medio de segmentos de líneas rectas, obedeciendo a los postulados y teoremas de la geometría. Es la llamada álgebra geométrica de los griegos.

Nosotros diríamos: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$




**Gráfica 1:** Factorización de $a^2 + 2ab + b^2$, geométricamente

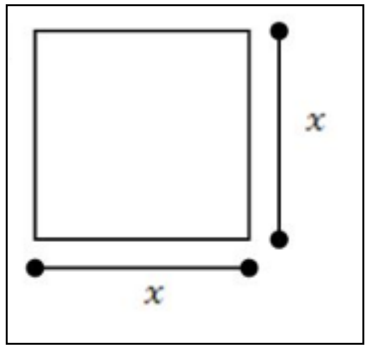
Veamos como expresaba Euclides: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

"Si cortamos una línea recta en segmentos iguales y desiguales entonces el rectángulo contenido por los segmentos desiguales del total, junto con el cuadrado construido sobre la línea recta entre los puntos de corte es igual al cuadrado sobre la mitad"

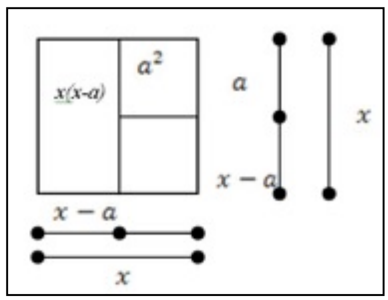
Los diagramas empleados por Euclides en este contexto jugó un papel clave, en el aprendizaje de los estudiantes, para factorizar una expresión. Por ejemplo:

La igualdad $(x-a)x + (x-a)a = (x+a)(x-a) = x^2 - a^2$

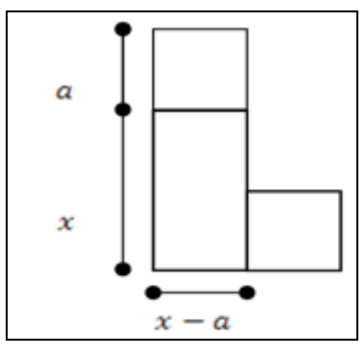
Dibujemos un cuadro de lado $x$:




Dividamos al cuadrado según muestra la figura:




Si la misma figura la dibujamos del siguiente modo podemos observar la igualdad planteada.




Además, en sus Elementos, Euclides resolvió problemas que equivalen a la solución de las ecuaciones $x^2 + ax = a$; $x^2 + ax = b^2$, esto lo hizo fundamentalmente, completando cuadrados geométricos y no considerando las raíces negativas.

### 2.6.2 El álgebra Geométrica.

El sistema simbólico que utiliza el álgebra geométrica para transmitir la información son los rectángulos y cuadrados que la conforman. La aplicación en el aula tiene implicaciones pedagógicas, por ejemplo, proporciona al estudiante por medio de la representación geométrica, que ellos capten mejor lo concreto de lo verbal y lo abstracto.

Su estructuración permite que el estudiante con ejercicios de aplicación, logren aprender la nueva información con los saberes previos que se tenían, así, incluso tratando el mismo tema, se puede estructurar este mismo material incluyendo más ejemplos y proponiendo más ejercicios que permitan un mejor afianzamiento de los nuevos conceptos por parte de los estudiantes.

El álgebra geométrica sirve de soporte y actúa como instrumento de mediación para acceder al conocimiento, que para nuestro caso es el aprendizaje de la factorización. No siempre se tiene disponible la infraestructura o las herramientas necesarias para la enseñanza en los diferentes centros de estudio. Por lo tanto, se deben utilizar materiales que permitan su elaboración con los estudiantes.

## 2.7 Referentes Curriculares

La mayoría de los maestros piensan que enseñar matemáticas es solo aplicar teoremas, solucionar problemas aplicando reglas o resolviendo algoritmos, dejando de lado elementos indispensables en los procesos de la enseñanza como son: la comunicación, el lenguaje, el trabajo en equipo y el respeto por la diferencia, sin descuidar el aspecto social; así las matemáticas sean consideradas una de las herramientas más privilegiadas en el campo intelectual, hay que dejar que los niños y los jóvenes disfruten del ambiente escolar y no vean las matemáticas como la asignatura más difícil en el proceso de su formación académica.

> *"Hacer matemáticas implica que uno se ocupe de problemas, pero a veces se olvida que resolver un problema no es más que parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrarles soluciones "(MEN, 1999)*

Por ello, el desarrollo de la guía didáctica, se basó en los referentes curriculares del área de matemáticas así:

- Pensamiento numérico
- Pensamiento geométrico
- Pensamiento algebraico

### 2.7.1 Pensamiento numérico:

Este pensamiento nos proporciona las herramientas necesarias, para que el estudiante pueda aplicar las reglas cuando desarrolla operaciones matemáticas, ya sean simples o complejas. Los estudiantes tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en sus contextos.

En este sentido Mcintosh (1992) amplía este concepto y afirma que "el pensamiento numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones, junto con la habilidad y la inclinación a usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al usar los números con sus operaciones".

En el desarrollo de la guía aplicamos estos conceptos cuando se realizan las actividades (subsumidor No.1, y actividades 2, 3) con los estudiantes, donde usan las operaciones matemáticas con números enteros y aplican las propiedades de la suma y la multiplicación; teniendo en cuenta la ley de los signos $(+,-)$.

### 2.7.2 Pensamiento geométrico:

El estudio de la geometría se ha dejado de lado en muchas instituciones educativas, ya que le han asignado una menor intensidad horaria, por lo tanto, actualmente se considera una obligación volver a recuperar el sentido espacial, intuitivo en toda la matemática, ya que es usada para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas.

El concepto de espacio está influenciado por las características cognitivas de cada estudiante por el entorno físico, cultural, social e histórico. Lo fundamental es argumentar que el concepto de "*espacio*" se haga a través de modelos y figuras, con palabras del lenguaje ordinario.

Teniendo en cuenta los conceptos del pensamiento geométrico al desarrollar las actividades propuestas en la guía, vemos como se les dificulta la interpretación de los conceptos sobre área, el término cuadrado y unidad cuadrada[4]. Esto se refleja en las actividades (subsumidor 2,3 y actividades 3,7) donde los estudiantes deben buscar y diferenciar el área de cada figura.

### 2.7.3 Pensamiento algebraico:

Se puede interpretar el desarrollo del pensamiento variacional como la interacción de conceptos básicos de la matemática con el lenguaje de expresiones complejas y la aplicación de leyes o teoremas, que son indispensables para la resolución de problemas. Esto se le hace más difícil al estudiante porque es allí donde tiene que fusionarlos y aplicarlos todos a la vez.

De esta forma se desarrolla la visión de la variación, su estudio se inicia al tratar de cuantificar la variación por medio de las cantidades y las magnitudes.

Estos conceptos ayudan en el estudiante a tener sentido de observación, de registro y a la utilización del lenguaje matemático.

[4] Según el Math Dictionary, unidad cuadrada es el área de un cuadrado cuyos lados miden 1 unidad.

En algunas ocasiones se considera la variación numérica discreta, y se hace necesario ir construyendo la variación numérica continua. Así mismo, las situaciones problemas deben seleccionarse para que los estudiantes se enfrenten a la construcción de expresiones algebraicas o la aplicación de algunas fórmulas.

Este pensamiento algebraico se ve aplicado en el desarrollo de las actividades presentadas en la guía (anexo 2 , actividades 8,9,10,11). Los estudiantes resuelven los ejercicios propuestos, todos ellos relacionados con los casos de factorización y lo hacen utilizando el material didáctico.

## 2.8 Los procesos generales en el aprendizaje de las matemáticas

### 2.8.1 Resolución de problemas.

En la medida que los estudiantes van resolviendo problemas, van ganando confianza en el uso de las matemáticas, desarrollan una mente investigadora y persistente, aumentan su capacidad de comunicación matemática y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel.

### 2.8.2 El razonamiento.

En el razonamiento matemático, es necesario tener en cuenta la edad de los estudiantes y su nivel de desarrollo y que cada logro alcanzado en un grado inferior se retoma y se amplía en los grados siguientes. Así mismo, se debe partir de los procesos de razonamiento que se dan en los grados inferiores, hasta llegar a niveles más elaborados del razonamiento en los grados superiores.

### 2.8.3 La comunicación.

A pesar de que suele repetirse lo contrario, las matemáticas no son un lenguaje, pero ellas pueden construirse, refinarse y comunicarse a través de diferentes lenguajes con los que se expresan y representan, se leen y se escriben, se hablan y se escuchan. La adquisición y dominio de los lenguajes propios de las matemáticas ha de ser un proceso deliberado y cuidadoso que posibilite y fomente la discusión frecuente y explícita sobre situaciones, sentidos, conceptos y simbolizaciones, para tomar conciencia de las conexiones entre ellos y para propiciar el trabajo colectivo, en el que los estudiantes compartan el significado de las palabras, frases, gráficos y símbolos, aprecien la necesidad de tener acuerdos colectivos y aún universales y valoren la eficiencia, eficacia y economía de los lenguajes matemáticos.

Las distintas formas de expresar y comunicar las preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos no son algo extrínseco y adicionado a una actividad matemática puramente mental, sino que la configuran intrínseca y radicalmente, de tal manera que la dimensión de las formas de expresión y comunicación es constitutiva de la comprensión de las matemáticas. (MEN, 1998)

### 2.8.4 La modelación.

La resolución de problemas en un amplio sentido, se considera siempre en conexión con las aplicaciones y la modelación. La forma de describir ese juego o interrelación entre el mundo real y las matemáticas es la modelación.

### 2.8.5 La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

Además de que el estudiante razone y se comunique matemáticamente, y elabore modelos de los sistemas complejos de la realidad, se espera también que haga cálculos correctamente, que siga instrucciones, que utilice de manera correcta una calculadora para efectuar operaciones, que transforme expresiones algebraicas desde una forma hasta otra, que mida correctamente longitudes, áreas, volúmenes, etc; es decir, que ejecute tareas matemáticas que suponen el dominio de los procedimientos usuales que se pueden desarrollar de acuerdo con rutinas secuenciadas.

El aprendizaje de procedimientos o “modos de saber hacer” es muy importante en el currículo, ya que éstos facilitan aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana.

Los procesos generales en el aprendizaje de las matemáticas, están inmersos en el desarrollo de la guía didáctica propuesta, así:

- Al desarrollar las actividades de diagnóstico sobre los conocimientos previos, donde los estudiantes resuelven los problemas planteados y expresan sus inquietudes y aclaran dudas.
- En la elaboración del material didáctico, se pueden conocer las habilidades y destrezas de cada uno de los estudiantes, además del grado de aceptación en el grupo. La comunicación y el trabajo colaborativo entre ellos, también hace posible que se resuelvan dificultades presentadas en una clase de matemáticas.
- Al aplicar la estrategia utilizando el material didáctico para factorizar y resolviendo expresiones algebraicas para formar áreas de un cuadrado o un rectángulo según el ejercicio propuesto, se puede ver el nivel de razonamiento y la capacidad para resolver un problema.

**Ilustración 1:** Trabajo de los estudiantes resolviendo los ejercicios con el material de la guía didáctica

## 2.9 Institución donde se aplicó la estrategia didáctica.

El PEI del ITM Campus Castilla contempla las directrices emanadas desde el Ministerio de Educación Nacional y está enfocado en la educación para adultos como lo contempla el decreto 3011 y en el artículo 10 de la ley 115, en el artículo 5º del decreto1860 de 1994.

El PEI contiene una misión y visión, en las que se refleja la identidad de la institución, constituida por la equidad de género, el respeto por la diferencia, el espíritu científico, la libertad de culto y la preservación del medio ambiente, entre otros.

El ITM Campus Castilla, es una institución educativa cuyo estilo de enseñanza se hace bajo la modalidad CLEI (Ciclos Lectivos Especiales Integrados) y trabaja bajo los referentes de la educación de "inclusión"[5], cuyo propósito es que sus estudiantes vuelvan a hacer parte de una comunidad productiva y lleven a cabo sus proyectos de vida, a pesar de las dificultades presentadas en su entorno social, cultural y de seguridad.

La población es heterogénea, cuya particularidad es que son jóvenes extra edad para estar en un colegio regular; su objetivo es terminar los estudios básicos para así poder continuar con los estudios superiores.

Su nivel socioeconómico oscila entre el estrato 0, 1, 2 y 3; la mayoría de ellos son madres cabeza de hogar y jóvenes trabajadores. Es de anotar que estos jóvenes desde temprana edad tienen una responsabilidad económica con sus familias.

El Campus Catilla se encuentra ubicado en la ciudad de Medellín en la calle 65 No. 98ª 75 en la comuna 5.

[5] Según la UNESCO, la inclusión educativa se ocupa de aportar respuestas pertinentes a toda la gama de necesidades educativas en contextos pedagógicos escolares y extraescolares. Tiene que ver con remover todas las barreras para el aprendizaje, y facilitar la participación de todos los estudiantes vulnerables a la exclusión y la marginalización.

# Capítulo 3

## Guía didáctica

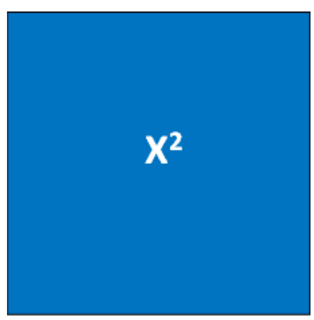
Se propone una guía didáctica que aborda el tema de la factorización en el CLEI IV del ITM Campus Castilla. Haciendo el diagnóstico grupal y luego en la etapa motivacional, se elabora el material didáctico a emplear (recorte de rectángulos y cuadrados) y el desarrollo de las actividades para la implementación de la guía didáctica, es decir, se hizo la transición de lo complejo a lo concreto (formación de las áreas geométricas dentro de la resolución de las ecuaciones algebraicas) y finalmente, la comprobación y evaluación de la estrategia.

Para la implementación de la propuesta, se realizaron diferentes actividades, entre ellas están: Desarrollo de talleres tipo diagnóstico, recorte de material didáctico (rectángulos y cuadrados) y aplicación de la guía didáctica.

El recorte del material se hizo en papel fomi. Cada estudiante debe tener suficiente material para resolver los ejercicios propuestos (ver anexo1, actividad 7)

Las figuras que se recortaron fueron:

**4** cuadrados de 13 cm * 13 cm de color azul.




**4** cuadrados de 8 cm * 8 cm de color rojo.


**4** rectángulos de 13 cm * 8 cm de color amarillo.

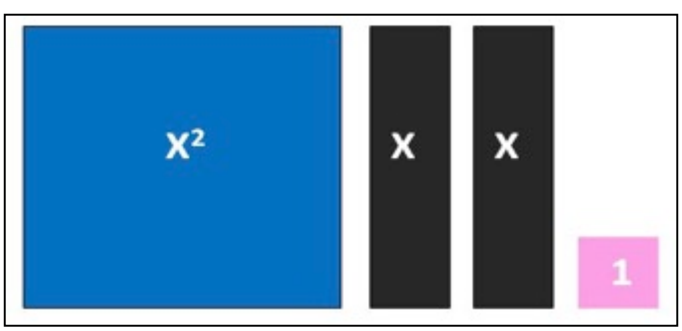

**15** rectángulos de 13 cm * 2cm de color negro.


**15** rectángulos de 8 cm * 2cm de color verde.


**70** cuadrados de 2cm * 2cm de color rosado.




Se explica a los estudiantes la manera como se utilizan los rectángulos y cuadrados: Primero se resuelve una expresión algebraica en forma tradicional y luego se pasa a reemplazar cada término por una de las figuras recortadas, así: $x^2 + 2x + 1$; esta expresión factorizada es



igual a $(x+1)(x+1)$.

Los cuadriláteros utilizados son: $x^2+2x+1$, los cuales se colocan de manera que sus lados coincidan con la medida exacta y siempre se busca formar un cuadrado o un rectángulo.

La figura formada es:


**Gráfica 2:** La factorización de la expresión $x^2+2x+1$ y da cuenta de un rectángulo de lados $(x+1)$

En este ejemplo se forma un cuadrado perfecto, la base corresponde a $(x+1)$ y la altura a $(x+1)$.

Cada estudiante debe estar muy concentrado, visualizando la dinámica del profesor con las figuras e ir haciendo lo mismo con las suyas. El profesor hace ejercicios pegando los cuadrados y rectángulos en el tablero y explica el proceso para formar la figura según el caso, teniendo en cuenta el valor que se obtiene en la base y en la altura de ésta.

Para la aplicación de la guía, se proponen varias actividades (ver anexo 1 actividad 8, 9, 10).

Estas actividades fueron orientadas al trabajo colaborativo, formación en valores y respeto por la diferencia, pues es una de las estrategias de trabajo contempladas en la institución.

Con la aplicación de la guía didáctica se demostró que utilizando cuadrados y rectángulos se pueden desarrollar geométricamente expresiones algebraicas como las siguientes, trinomio de la forma $x^2+bx+c$ y $ax^2+bx+c$, los productos notables, entre otras.

## 3.1 Desarrollo de la guía didáctica

Para la implementación de la guía didáctica, se hizo la transición de lo complejo a lo concreto (formación de las áreas geométricas dentro de la resolución de las ecuaciones algebraicas) y finalmente la comprobación y evaluación.

- En el primer momento se hizo un diagnóstico a la población; luego, se hicieron actividades para conocer el nivel académico de los estudiantes y saber de sus conocimientos previos (subsumidores).
- En el segundo momento se elaboró el material y se les enseñó cómo utilizarlo para resolver expresiones algebraicas.

**Ilustración 2:** Estudiantes cortando las figuras propuestas en la guía didáctica

- En el tercer momento, se aplica la estrategia didáctica con el material elaborado y se emplean los postulados del álgebra geométrica al formar las áreas de los cuadrados y rectángulos expresados en términos de base por altura, comparándolos con la expresión algebraica resuelta (ver anexo 1 actividad No.8,9,10).

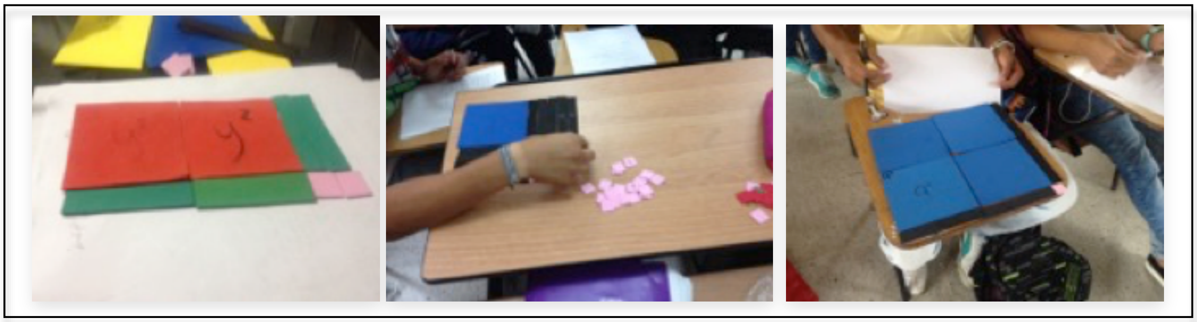
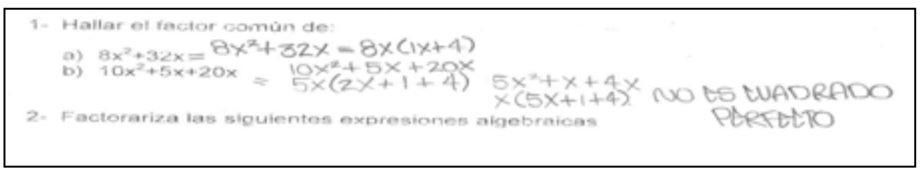


**Ilustración 3:** Factorizando con el uso de las figuras geométricas

- En el cuarto momento se hace el análisis de las actividades realizadas y se evalúa la estrategia aplicada.



1- Hallar el factor común de:

a) $8x^2+32x =$ $8x^2+32x = 8x(1x+4)$

b) $10x^2+5x+20x$ $10x^2+5x+20x$ $= 5x(2x+1+4)$ $5x^2+x+4x$ $x(5x+1+4)$ NO ES CUADRADO PERFECTO

2- Factorariza las siguientes expresiones algebraicas

**Ilustración 4:** Hallando factor común, trabajo de los estudiantes

### 3.2 Descripción del Material

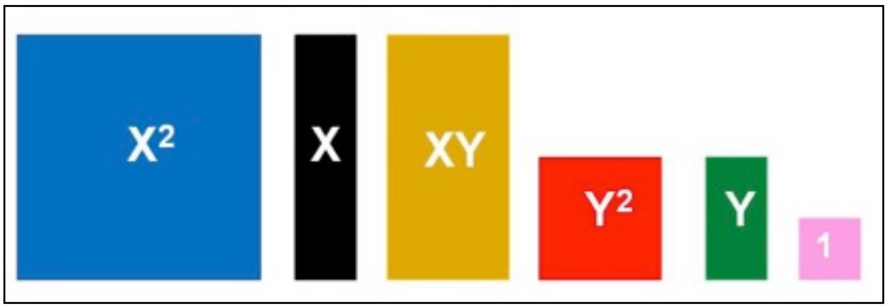
Utilizando los conceptos de aprendizaje significativo de Ausubel, se desarrolló dicha estrategia (guía didáctica para el aprendizaje significativo de la factorización).

También se tuvieron en cuenta los postulados de Euclides sobre el álgebra geométrica de los griegos, cuyo método es la implementación de bloques en la enseñanza del álgebra, específicamente la geométrica, y la demostración de áreas (base por altura $b.h$). Se recortaron los rectángulos y cuadrados utilizando diferentes colores para poder diferenciar las áreas y las unidades de las mismas. Aquí, lo más importante es la medida de los cuadrados y rectángulos.

Para poder acceder al conocimiento del álgebra, no siempre tenemos los recursos e infraestructuras disponibles en las instituciones educativas, de esta manera, utilizamos materiales que se puedieran elaborar con los estudiantes, como es el caso de los cuadrados y rectángulos hechos en papel fomi.

Los cuadrados y rectángulos se pueden elaborar de diversos materiales y dimensiones de acuerdo a su uso; en acrílico para retroproyectores, de lija para franela, o figuras imantadas para tablero magnético, madera u otros materiales.

Se tiene en cuenta que las letras pueden ser reemplazadas así: *"la $x$, por la letra $a$; la $y$ por la letra $b$".*




**Gráfica 3:** Figuras propuestas en la guía didáctica, para el proceso de factorización.

**Aspectos a tener en cuenta:**

- El lado del cuadrado pequeño es uno de los lados del rectángulo.
- La medida del largo de los rectángulos es la mediada del lado del cuadrado grande.
- Los cuadrados pequeños no cubren exactamente los rectángulos.
- Los rectángulos no cubren exactamente los cuadrados grandes.

El material que cada estudiante recortó fue:

4 cuadrados color azul de 13cm x 13cm.

4 cuadrados color rojo de 8cm x 8cm.

4 rectángulos color amarillo de 13cm x 8cm.

15 rectángulos color negro de 13cm x 2cm.

15 rectángulos color verde de 8cm x 2cm.

70 cuadrados color rosa de 2cm x 2cm.

El objetivo es que cada estudiante tenga en sus manos un grupo de figuras con las especificaciones, lápiz y papel, para verificar teóricamente algunos de los casos de factorización que a continuación se expondrán de acuerdo a esta propuesta (anexo1, actividad 8, 9, 10).

En la implementación de esta estrategia se eligió el grado octavo del ITM Campus Castilla, haciendo el diagnóstico grupal y luego, en la etapa motivacional, se elabora el material didáctico a emplear en dicha estrategia (recorte de rectángulos y cuadrados) y el desarrollo de las actividades para la implementación de la guía didáctica, es decir, se hizo la transición de lo complejo a lo concreto (formación de las áreas geométricas dentro de la resolución de las ecuaciones algebraicas) y, finalmente, la comprobación y evaluación de la estrategia.

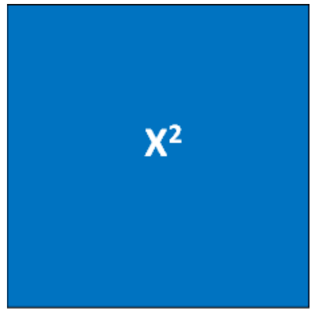
Se demostró que un producto notable o algunos casos de factorización, puede verificarse formando áreas geométricas, permitiendo así la concreción de un aprendizaje significativo. Teniendo en cuenta los planteamientos de la teoría del aprendizaje significativo: “El aprendizaje del alumno depende de la estructura cognitiva previa que se relaciona con la nueva información”. Para el aprendizaje de la factorización de una expresión algebraica, el estudiante debia tener unos subsumidores que mediante el proceso de interacción se modificaron para dar paso a la nueva información. (Ausubel, 1983).

## 3.3 Factorización y productos notables

### 3.3.1 Factor común

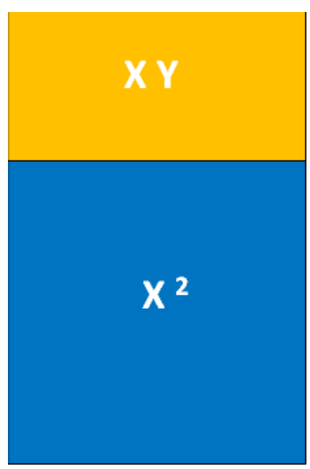
Factorización utilizando la propiedad asociativa de la multiplicación con respecto a la suma. Construyamos un cuadrado de lado $x$.

Es decir su área es igual a $x^2$




Ahora un rectángulo de lados $x$ e $y$, entonces su área es $x.y$, Veamos:


Sumando las áreas anteriores, obtendríamos $x^2 + x.y$. Si la representamos a través de los bloques nos queda de la siguiente manera:

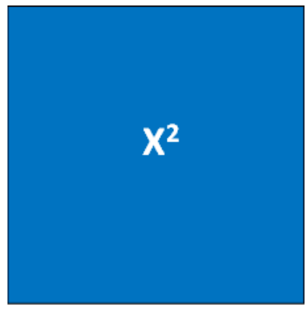



**Gráfica 4** :Factorización de la expresión $x^2 + x.y$ formando un rectángulo cuya área es $x.(x + y)$

El área de este rectángulo es $x.(x+y)$, por lo tanto, $x^2+x.y=x.(x+y)$. Si observas con detenimiento el lado que es compartido por las dos figuras, determina el factor común entre los dos términos.

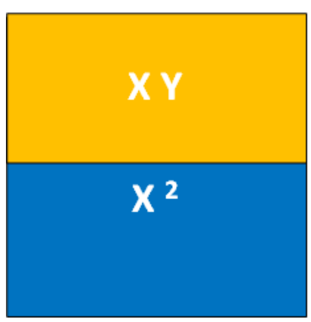
Veamos otro ejemplo:

Construyamos un cuadrado de lado $x$. Su área es $x^2$




Grafiquemos un rectángulo de lados $x$ e $y$. Luego su área es $x.y$


Ahora, superpongamos las dos figuras de tal forma que coincida el lado $x$.



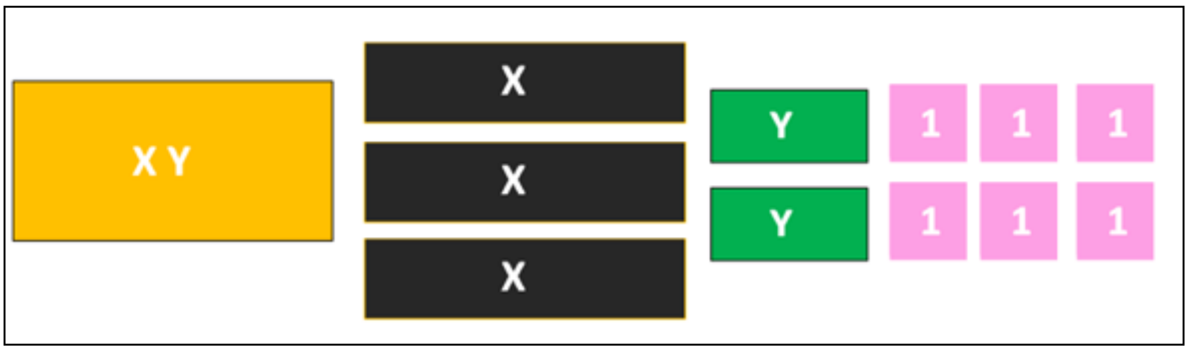

**Gráfica 5:** Factorización de la expresión $x^2-x.y$, donde la solución es el rectángulo azul, cuya área es $x.(x-y)$

La diferencia de áreas la expresamos como $x^2 - x.y$.

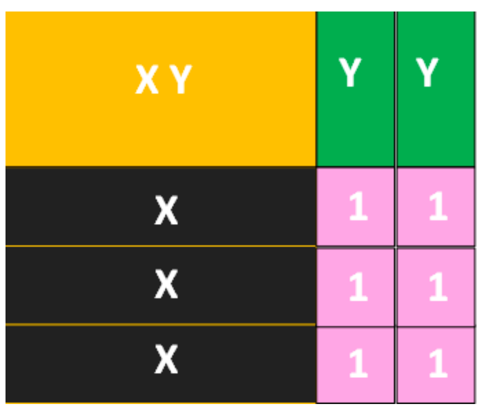
Luego podemos concluir que $x^2 - x.y = x.(x - y)$. Observa detenidamente el lado que comparten ambas figuras, es el factor común de ambas expresiones.

### 3.3.2 Factor comun por agrupacion:

Representemos geométricamente cada uno de sus términos: Factoricemos geométricamente la expresión $x.y + 3x + 2y + 6$




Agrupemos las distintas figuras de tal forma que coincidan sus lados comunes.



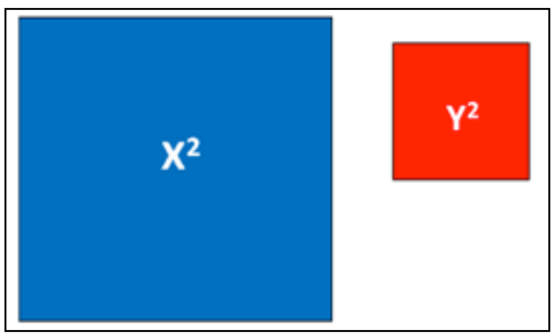

**Gráfica 6:** Factorización de la expresión $x.y + 3x + 2y + 6$, donde el área del rectángulo es $(x+2)(y+3)$

El área de esta figura la podemos expresar de dos maneras:

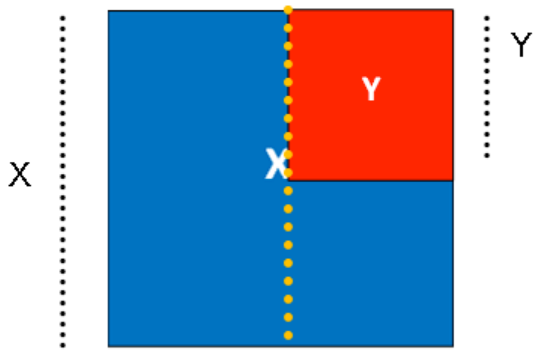
- Como el área total de un rectángulo de lados $(x+2)$ $y$ $(y+3)$, la cual expresamos como: $(x+2)(y+3)$
- Como la suma de dos áreas parciales, una de ellas un rectángulo de lados $x$ y $(y+3)$ y la otra, la de un rectángulo de lados *2* y $(y+3)$. Resultando la siguiente expresión $x.(y+3)+2.(y+3)=(x+2)(y+3)$.
- Obsérvese que el lado común de las dos áreas parciales es $(y+3)$.

### 3.3.3 Diferencia de cuadrados

Construyamos un cuadrado de lado $x$ y otro de lado $y$, cuya área es $x^2$ y $y^2$, respectivamente.



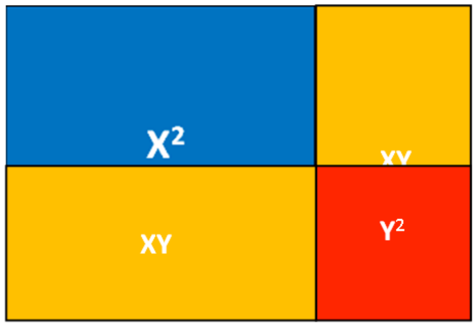

En el interior del cuadrado grafiquemos un cuadrado de lado $y$, tal que $y<x$, del cuadrado de lado $x$ removemos el cuadrado de lado $y$, lo que algebraicamente se expresaría como $x^2-y^2$




Gráfica después de quitar el cuadrado de lado $y$:


Esta figura está formada por dos rectángulos: uno de lados $(x-y)$ y $x$; y el otro de lados $(x-y)$ y $y$. Si sumamos las áreas de estos dos rectángulos, obtenemos la expresión $x.(x-y)+y.(x-y)$ $x.(x-y)+y.(x-y)$ que es igual a escribir la expresión, $x^2-y^2$.

Por lo tanto, $x.(x-y)+y.(x-y)=x^2-y^2$. Otra manera de visualizar el resultado anterior sería trasladando el rectángulo de lados $y$ y $(x-y)$ a la parte superior o inferior del rectángulo de lado $(x-y)$ y $x$. Veamos:




**Gráfica 7:** Factorización de la expresión $x^2 - y^2$, formando dos rectángulos, uno de lados $(x-y)$ y $x$; y el otro de lados $(x-y)$ y $y$

### 3.3.4 Trinomios cuadrados perfectos:

Si tenemos la expresión $(x+1)^2$, su factorización es $x^2+2x+1$. Visualicemos en forma geométrica la solución de este trinomio cuadrado perfecto:


Representemos $x^2$ como un cuadrado del lado $x$.

Representemos a $x$ como un rectángulo de lado $x$ y $1$.

La unidad como un cuadrado de lado 1.

Luego, para la expresión $x^2+2x+1$ se organizan estas figuras para obtener el siguiente cuadrado:


**Gráfica 8:** Factorizacion de la expresión $x^2+2x+1$, tiene como resultado un cuadrado de lado $(x+1)$ y su área es $(x+1)^2$

El área de este cuadrado es, $(x+1).(x+1)=(x+1)^2$ , luego, $x^2+2x+1=(x+1)^2$

A esta expresión algebraica se le denomina Trinomio Cuadrado Perfecto.

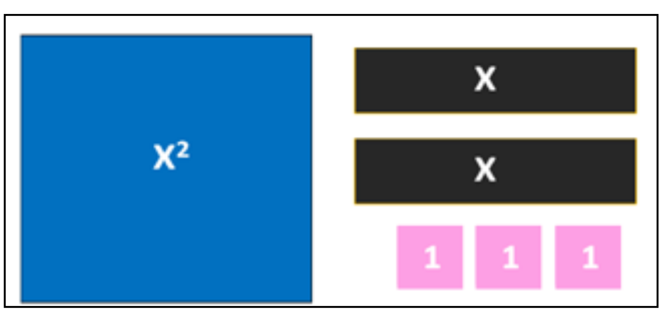
### 3.3.5 Trinomio de la forma $x^2+bx+c$

Factoricemos el trinomio $x^2-2x-3$ Representemos los términos de este trinomio de la siguiente manera:

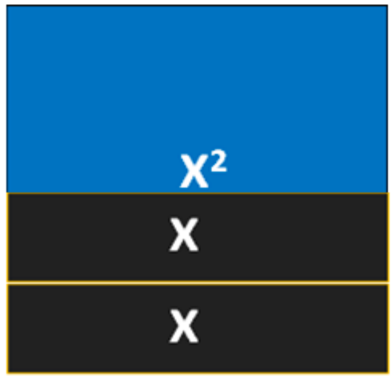
El término $x^2$ mediante un cuadrado de la $x$.

El término $2x$ como dos rectángulos de lados $x$ y $1$.

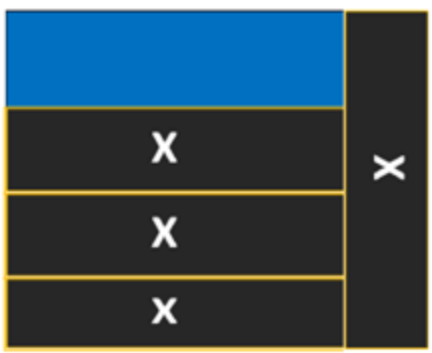
Las $3$ unidades como tres cuadrados de lado 1:



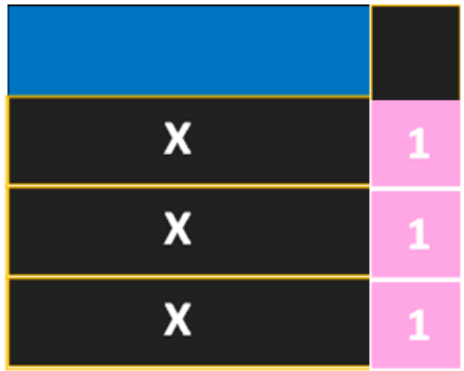
Representemos ahora, el trinomio $x^2-2x-3$, a través de un rectángulo obtenido de la siguiente forma. Del cuadrado de área $x^2$ restamos el área de los dos rectángulos de lados $1$ y $x$.




Pero la operación anterior es equivalente a restar tres de estos rectángulos y adicionar uno de ellos, así:




Ahora, restamos los 3 cuadrados de lado 1 que se forman al prolongar los tres rectángulos que hemos restado sobre el rectángulo adicionado:



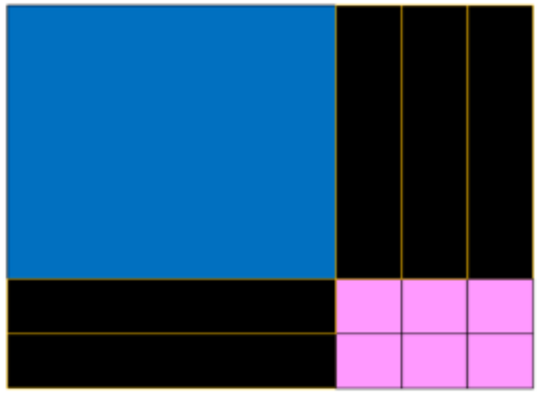

**Gráfica 9:** Factorización de la expresión $x^2 - 2x - 3$, la cual genera un rectángulo cuya área es $(x+1).(x-3)$.

El área del rectángulo obtenido (área coloreada de azul) es igual a: $(x+1).(x-3)$.

Luego, $x^2 - 2x + x - x - 3 = (x+1).(x-3)$

Seguidamente, veamos la factorización del trinomio $x^2 + 5x + 6$ y representemos gráficamente los términos:

Esta vez, el trinomio $x^2 + 5x + 6$ lo representamos sumando al cuadrado de área $x^2$, los cinco rectángulos de lado 1 y $x$ de la siguiente manera:

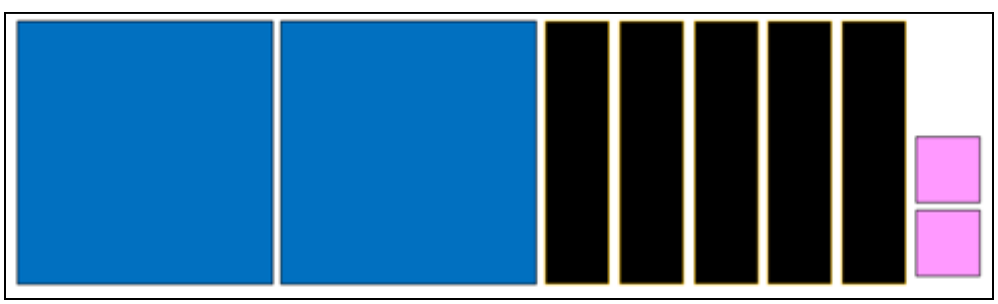


**Gráfica 10:** Factorización de la expresión $x^2+5x+6$, genera un rectángulo de área $(x+3).(x+2)$

Finalmente, prolongando los lados de los rectángulos adicionados horizontal y verticalmente, obtenemos los seis cuadrados de lado 1 que también deben ser adicionados.

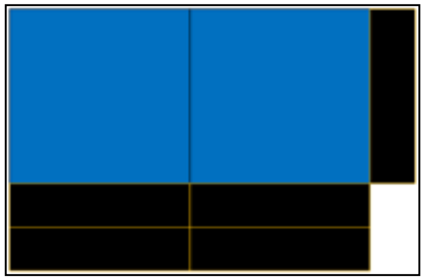
El área sombreada que hemos obtenido es igual a $(x+3).(x+2)$. Luego, tenemos lo siguiente: $x^2+5x+6=(x+3).(x+2)$

### 3.3.6 Trinomio de la forma: $ax^2+bx+c$

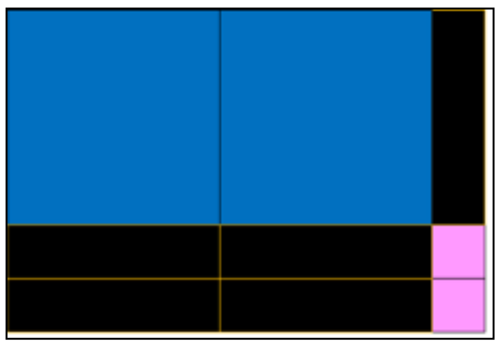


Factoricemos el trinomio $2x^2+5x+2$ y representemos gráficamente sus términos:

Representemos ahora el trinomio $2x^2+5x+2$. Inicialmente al rectángulo le sumamos *2* cuadrados de área $x^2$ y los cinco rectángulos de lado *1* y $x$ .



Y finalmente, a la figura anterior le adicionamos los dos cuadrados de lado 1:



**Gráfica 11:** Factorización de la expresión $2x^2+5x+2$, genera un rectángulo de área $(2x+1).(x+2)$

Obtenemos de esta manera un rectángulo de lados $(2x+1)$ y $(x+2)$, cuya área es: $(2x+1).(x+2)$, luego, tenemos: $2x^2+5x+2=(2x+1).(x+2)$.

La práctica pedagógica se realizó entre los meses de julio y diciembre del presente año; se cuenta con el mes de diciembre porque el calendario académico de la institución va hasta el 12 de diciembre.

# Capítulo 4

## Análisis cualitativo

Por las características del trabajo desarrollado y su perfil educativo, se analizan las actividades desarrolladas por los estudiantes de manera cualitativa. Este método nos facilita una descripción detallada de los procesos realizados con los estudiantes a la hora de aprender matemáticas y, en este caso, a factorizar.

Se cree que este método no cuenta con unas bases sólidas en el campo investigativo; pero éste no es un estudio de muestras, ya que no se está analizando el grado de comprensión de otros, sino de un caso en particular que se hace de manera detallada; es aquí donde éste tiene importancia en la investigación de las actividades desarrolladas por los estudiantes.

El análisis cualitativo tiene en cuenta aspectos como: la "actitud" frente a una dificultad o problema, el grado de razonamiento del estudiante cuando desarrolla una ecuación matemática y su nivel académico. Todo esto está relacionado con el trabajo del aula y su contexto.

### 4.1 Estudio de casos

En el estudio de caso hay que ser muy éticos con la interpretación de los resultados obtenidos; también influye mucho la interrelación del docente con los estudiantes y el entorno donde se desarrolla la investigación.

El proyecto presentado se analiza, teniendo como base los referentes planteados por Stake en el estudio de caso. Sugiere que cuando se eligen los casos, se deben seleccionar los más fáciles para que el trabajo de investigación sea reconocido positivamente por los lectores, "quizá aquellos en los que se pueda identificar un posible informador y que cuenten con actores dispuestos a dar una opinión" frente a los resultados encontrados en los casos estudiados (Stake, 1999).

## 4.2 Selección de los participantes

Basados en el problema planteado en la investigación, se hace necesario diseñar una guía didáctica para facilitar el aprendizaje del álgebra, específicamente de algunos casos de factorización como, resolución de polinomios, trinomios y productos notables. Se desarrollaron varias actividades valiéndose del álgebra geométrica usando cuadrados y rectángulos como material didáctico. Ahora bien, teniendo en cuenta los procesos de razonamiento, y los conceptos previos (subsumidores) que estos tienen, es necesario para la aplicación de esta guía didáctica tener estudiantes que hallan pasado por otros modelos metodológicos en la enseñanza del álgebra.

Los estudiantes del ITM campus Castilla son jóvenes que han pasado por diferentes procesos de aprendizaje del álgebra sin tener buenos resultados, es por ello que cobra significado la construcción de una guía didáctica adecuada para verificar si es posible que estos estudiantes puedan tener un aprendizaje significativo a partir de unos subsumidores ya planteados.

## 4.3 Trabajo de campo

Para el análisis de las respuestas de los estudiantes, se tienen en cuenta los objetivos planteados en las actividades desarrolladas.

Para la implementación de la propuesta se realizaron diferentes actividades, entre ellas están: desarrollo de guías tipo diagnóstico, recorte de material didáctico (rectángulos y cuadrados) y aplicación de la guía didáctica.

Desarrollo de guías tipo diagnóstico (subsumidores):

El análisis se basa en el manejo de los conceptos previos o subsumidores como son: Agrupación de números enteros, el término área y sus aplicaciones, y unidad cuadrada. El estudiante debe tener muy claro estos conceptos para poder relacionar lo aritmético con lo algebraico (anexo 1 actividades 3,4,5).

Recorte de material didáctico:

En esta actividad, cada estudiante maneja los conceptos de área, medida, congruencia y semejanza de las figuras. Es una de las actividades más interesantes por el trabajo colaborativo que se hace dentro del aula, teniendo presente las características del grupo (ver anexo 1, actividad 7).

Aplicación de la guía didáctica:

En este momento se presentan los conceptos matemáticos que están relacionados con la agrupación de términos, áreas y figuras geométricas. Se desarrollan varios ejercicios de factorización en los cuales se hace una interpretación geométrica del área que se forma al utilizar los cuadrados y los rectángulos que dan cuenta del polinomio. La figura que se forma representa una expresión algebraica (anexo 1 actividad 8, 9,10).

De las actividades realizadas con el grupo, el investigador selecciona tres casos en los cuales se puede observar un comportamiento particular en el aprendizaje del concepto de factorización de una expresión algebraica. Los casos se escogen teniendo en cuenta el desempeño de los estudiantes al resolver las diferentes actividades, estos se dividen en:

- Los estudiantes que resuelven satisfactoriamente los problemas propuestos en las guías.
- Los estudiantes que logran resolver algunos de los problemas propuestos en las guías.
- Los estudiantes que no logran resolver los problemas propuestos en las guías.

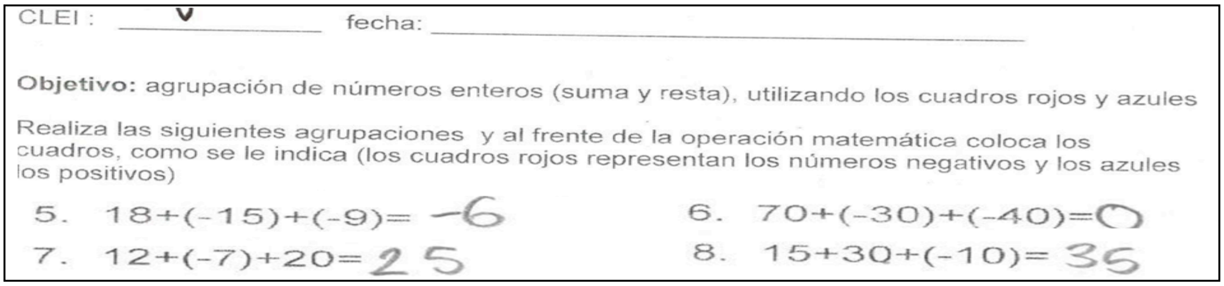
Los casos escogidos son: Vanessa, Alexis y Luis, que aunque son seudónimos, se etiquetarán como C1, C2 y C3, respectivamente.

### 4.3.1 Caso 1: Vanessa (C1)

Desarrollo de guías tipo diagnóstico (subsumidores):

C1 responde todas las preguntas de manera satisfactoria y realiza las actividades propuestas para verificar los conocimientos previos o subsumidores, que son el pilar para continuar con el proceso de aprendizaje (actividades analizadas las 1, 3, 4,5).

Al desarrollar ejercicios sobre agrupación de números enteros, los soluciona sin ninguna dificultad, lo que demuestra que C1 tiene claros los conceptos de agrupación, ley de signos y asociación de términos.


CLEI : V fecha:

**Objetivo:** agrupación de números enteros (suma y resta), utilizando los cuadros rojos y azules

Realiza las siguientes agrupaciones y al frente de la operación matemática coloca los cuadros, como se le indica (los cuadros rojos representan los números negativos y los azules los positivos)

5. 18+(-15)+(-9)= -6
6. 70+(-30)+(-40)=0
7. 12+(-7)+20=25
8. 15+30+(-10)=35

**Ilustración 5:** Respuesta de C1 a la actividad 4 agrupación de números enteros.

En los ejercicios propuestos para hallar áreas C1 aplica las fórmulas correctamente para la llegar a la solución del problema propuesto.

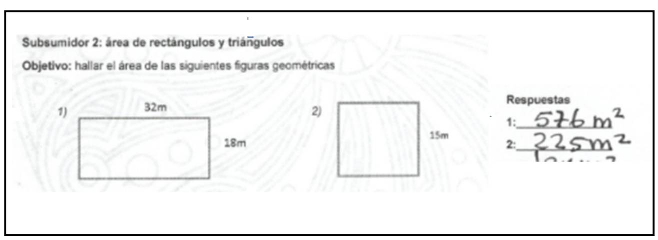
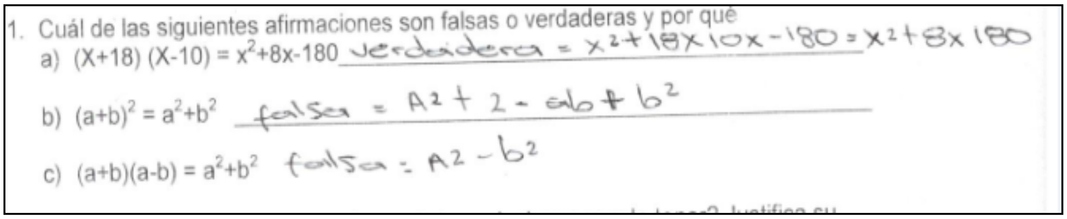



**Ilustración 6:** Respuesta de C1 a la actividad 5 hallar áreas de rectángulos y cuadrados numeral 1 y 2



1. Cuál de las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y por qué

a) $(X+18)(X-10) = x^2+8x-180$ verdadera $= x^2+18x\ 10x-180 = x^2+8x\ 180$

b) $(a+b)^2 = a^2+b^2$ falsa $= A^2 + 2 - ab + b^2$

c) $(a+b)(a-b) = a^2+b^2$ falsa $= A^2 - b^2$

**Ilustración 7:** Respuesta de C1 a la actividad 3 numeral 2.

Se observa como la estudiante tiene claros los conceptos para empezar a factorizar, trabaja las operaciones para hallar áreas de las figuras geométricas con números enteros, reconoce el término que dá cuenta de la agrupación de las figuras y tiene clara la definición de unidad cuadrada; todos estos son subsumidores necesarios para el aprendizaje del álgebra.

Recorte de material didáctico:

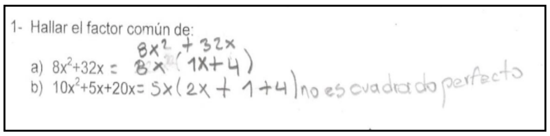
C1 realizó el recorte del material de manera satisfactoria, reconoce bien el concepto de medida en figuras cuadradas y rectangulares, en el momento que recotaron el material lo hizo de manera acertada como lo propone la actividad 7; también demostró interés por la actividad realizada, le colaboró a algunos compañeros, pues maneja muy bien su motricidad fina, tiene buenas relaciones con el grupo y es una estudiante muy emprendedora, se veía muy motivada con el trabajo realizado.

**Ilustración 8:** C1 En la construcción del material de la guía didáctica

Aplicación de la guía didáctica:

En esta fase se trabaja sobre el pensamiento algebraico, la aplicación del álgebra geométrica y del material didáctico elaborado por los estudiantes (rectángulos y cuadrados) utilizado en la resolución de expresiones algebraicas. Es el momento de verificar si los subsumidores tenidos en cuenta son relevantes para el aprendizaje significativo de la factorización. C1 trabajó de manera rápida, tenía claro los conceptos y manejaba bien el lenguaje matemático necesario para resolver las expresiones algebraicas, propuestas en las actividades 8, 9 y 10.

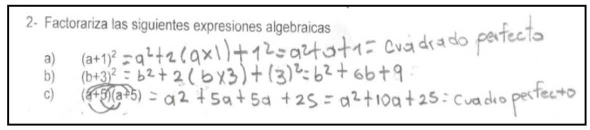
Resuelve las operaciones de factor común y los productos notables, define si el resultado de la operación forma un cuadrado o un rectángulo.


1- Hallar el factor común de:

a) $8x^2+32x = 8x(1x+4)$

b) $10x^2+5x+20x = 5x(2x+1+4)$ no es cuadrado perfecto

**Ilustración 9:** Respuesta de C1 a la actividad 9 numeral 1.


2- Factorariza las siguientes expresiones algebraicas

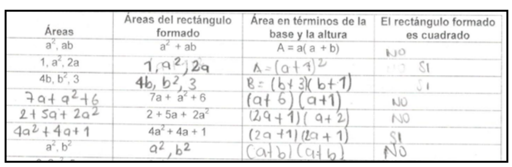
a) $(a+1)^2 = a^2+2(a\times1)+1^2 = a^2+a+1$ = cuadrado perfecto

b) $(b+3)^2 = b^2+2(b\times3)+(3)^2 = b^2+6b+9$

c) $(a+5)(a+5) = a2+5a+5a+25 = a^2+10a+25$ = cuadio perfecto

**Ilustración 10:** Respuesta de C1 a la actividad 9 numeral 2.

De los ejercicios propuestos en la actividad 8 y 10, tiene claro el concepto de área en términos de base por altura y ubica los cuadrados y rectángulos sin dificultad.



| Áreas | Áreas del rectángulo formado | Área en términos de la base y la altura | El rectángulo formado es cuadrado |
|---|---|---|---|
| $a^2$, ab | $a^2 + ab$ | $A = a(a + b)$ | NO |
| 1, $a^2$, 2a | 1, $a^2$, 2a | $A = (a+1)^2$ | SI |
| 4b, $b^2$, 3 | 4b, $b^2$, 3 | $B = (b+3)(b+1)$ | SI |
| $7a+a^2+6$ | $7a + a^2 + 6$ | $(a+6)(a+1)$ | NO |
| $2+5a+2a^2$ | $2 + 5a + 2a^2$ | $(2a+1)(a+2)$ | NO |
| $4a^2+4a+1$ | $4a^2 + 4a + 1$ | $(2a+1)(2a+1)$ | SI |
| $a^2$, $b^2$ | $a^2$, $b^2$ | $(a+b)(a+b)$ | NO |

Ilustración 11: Respuesta de C1 a la actividad 8 y 10

### 4.3.2 Caso 2: Alexis (C2)

Desarrollo de guías tipo diagnóstico (subsumidores):

C2 al desarrollar ejercicios sobre agrupación de números enteros, se le dificulta un poco la tarea porque no aplica bien la ley de signos, no obstante, el material didáctico entregado para desarrollar la actividad, le ayudó a resolverlos demostrando con ello la importancia que estos tienen en el aprendizaje de la agrupación de números enteros.

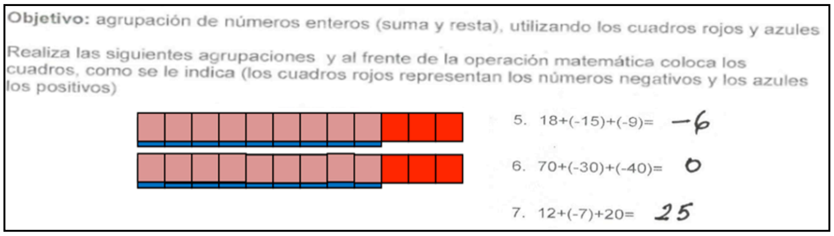



**Ilustración 12:** Respuesta de C2 a la actividad 4 agrupaciones de números enteros

El estudiante tiene claros los conceptos de área, no define bien las unidades de medida puesto no se muestra en que unidad esta midiendo (Ilustración 13), hay confusión con el uso de los signos de agrupación, no los emplea para demostrar los resultados que se piden en los ejercicios propuestos en las actividades 3 y 5 (Ilustración 14).

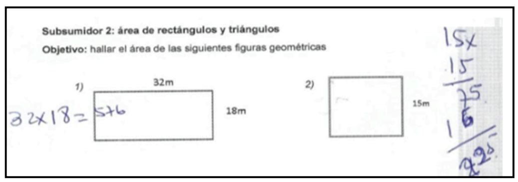



**Ilustración 13:** Respuesta de C2 a la actividad 3 hallar el valor de las áreas de las figuras

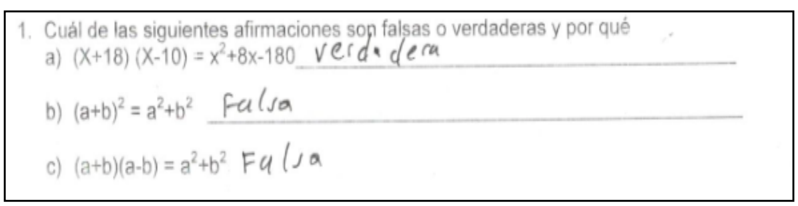



**Ilustración 14:** Respuesta de C2 a la actividad 5 demostrar el uso de signos de agrupación

Recorte de material didáctico:

C2 realizó la construcción del material de manera satisfactoria, reconoce las medidas de las figuras que se debían recortar como lo propone la actividad 7, también demostró interés por la actividad realizada. El joven es muy disciplinado, el grupo lo aprecia por su buen comportamiento. El objetivo de esta actividad además de recortar el material, es analizar el comportamiento de los jóvenes cuando se cambia la metodología al dar una clase de matemáticas. En esta fase, los estudiantes no presentaron mayores dificultades.

Aplicación de la guía didáctica:

C2 se le dificulta la interpretación de algunas expresiones puesto que aplica los subsumidores de la guía diagnóstica; llega al resultado correcto del ejercicio pero no lo explica desde el punto de vista geométrico, no dice si el resultado representa un cuadrado o un rectángulo.

1- Hallar el factor común de:

a) $8x^2+32x = 8x(1x+4)$
b) $10x^2+5x+20x$ $5x(2x+1+4)$

2- Factorariza las siguientes expresiones algebraicas

a) $(a+1)^2 = a^2+2.a.1+1^2 = a^2+2a+1$
b) $(b+3)^2 = b^2+2.b.3+3^2 = b^2+6b+9$
c) $(a+5)(a+5) = a^2+5a+5a+25 = a^2+10a+25$

**Ilustración 15 :**Respuesta a la actividad 9 numeral 1 y 2

En esta actividad con la ayuda del material didáctico, logra resolver algunos de los ejercicios propuestos en la actividad 8 y 10, se le dificulta la resolución de expresiones algebraicas cuando hay que enunciarlas en términos de base por altura ( $A = b \times h$, donde b es la base y h es la altura). El estudiante resuelve ejercicios en forma numérica, pero hay falencias con la interpretación geométrica, aunque esto se debe a que no identifica las figuras formadas por los cuadrados y los rectángulos.

| Áreas | Áreas del rectángulo formado | Área en términos de la base y la altura | El rectángulo formado es cuadrado |
|---|---|---|---|
| $a^2$, ab | $a^2 + ab$ | A = a( a + b) | No |
| 1, $a^2$, 2a | $1+a^2+2a$ | $A = (a+1)^2$ | Si |
| 4b, $b^2$, 3 | $4b+b^2+3$ | $B = (b+3)(b+1)$ | No |
| $7a+a^2+6$ | $7a + a^2 + 6$ | $(a+6)(a+1)$ | No |
| $2+5a+2a^2$ | $2 + 5a + 2a^2$ | $(2a+1)(a+2)$ | No |
| $4a^2+4a+1$ | $4a^2 + 4a + 1$ | $(2a+1)(2a+1)$ | Si |

**Ilustración 16** Respuesta de C2 a la actividad 8 y 10

### 4.3.3 Caso 3: Luis (C3)

Desarrollo de guías tipo diagnóstico (subsumidores):

C3 al desarrollar los ejercicios sobre agrupación de números enteros se le dificulta la tarea, porque no comprende la ley de signos, pero el material didáctico que consta de fichas rojas y azules en los cuales las rojas representan una cantidad negativa y las azules representan una cantidad positiva, le ayudó a desarrollar adecuadamente la actividad.

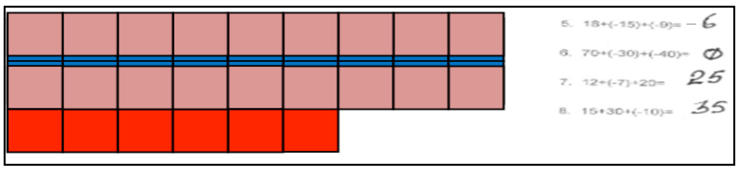



**Ilustración 17** Respuesta de C3 a la actividad 4 agrupaciones de números enteros

El estudiante no tiene claro el concepto de área, se le dificulta comprender los términos base y altura, no conoce los signos de agrupación y no los emplea para demostrar los resultados que se piden en los ejercicios. Presenta dificultades con la interpretación del lenguaje matemático y con el desarrollo de las operaciones planteadas.

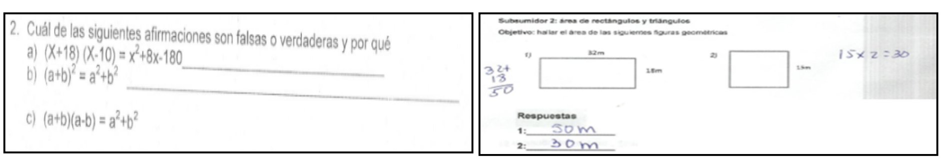



**Ilustración 18:** Respuesta C3 a las operaciones planteadas en actividades 3 y 5

Recorte de material didáctico:

C3 realizó la construcción del material de manera satisfactoria, reconoce las medidas de las figuras que se debían recortar como lo propone la actividad 7, también demostró interés por la actividad realizada.

Una característica importante observada en esta actividad fue que él recortó las figuras muy bien y lo hizo sin ninguna dificultad, manifestando confianza y agrado al realizarlo.

Aplicación de la guía didáctica:

C3 presenta dificultades en la aplicación de los conceptos propuestos para resolver las expresiones algebraicas trabajadas en las actividades 8, 9, 10. Esto sucede ya que no aplica los conceptos previos o subsumidores en los ejercicios planteados. Lo que si se observó en él fue el buen manejo de las figuras (cuadrados y rectángulos) para formar el cuadrado o el rectángulo que da cuenta de la expresión algebraica que se va a factorizar, logró desarrollar algunos ejercicios utilizando el material didáctico y demostró interés por la actividad, se hizo un trabajo diferenciador con el estudiante, mediante el acompañamiento por el docente de manera individual, y mediante la ayuda de los compañeros que tenían claros los conceptos algebraicos. Fue una de las mejores experiencias por que debido a las dificultades encontradas, se pudo lograr que este estudiante comprendiera el concepto de área, de unidad cuadrada y la ubicación geométrica de una figura plana como el cuadrado o el rectángulo.

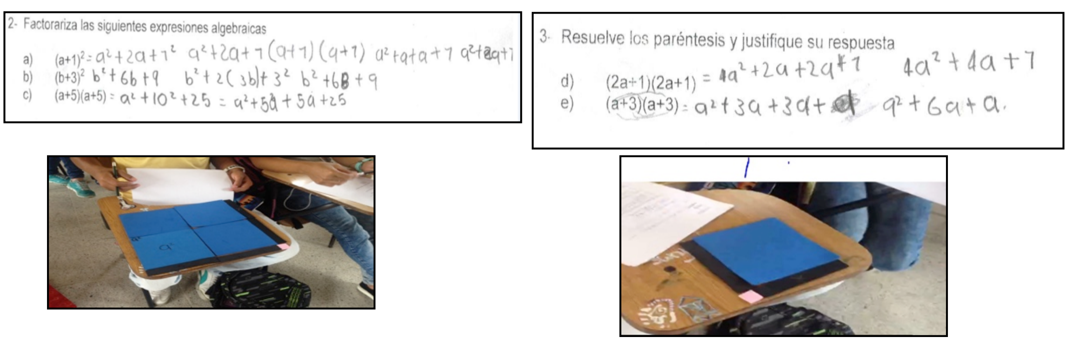
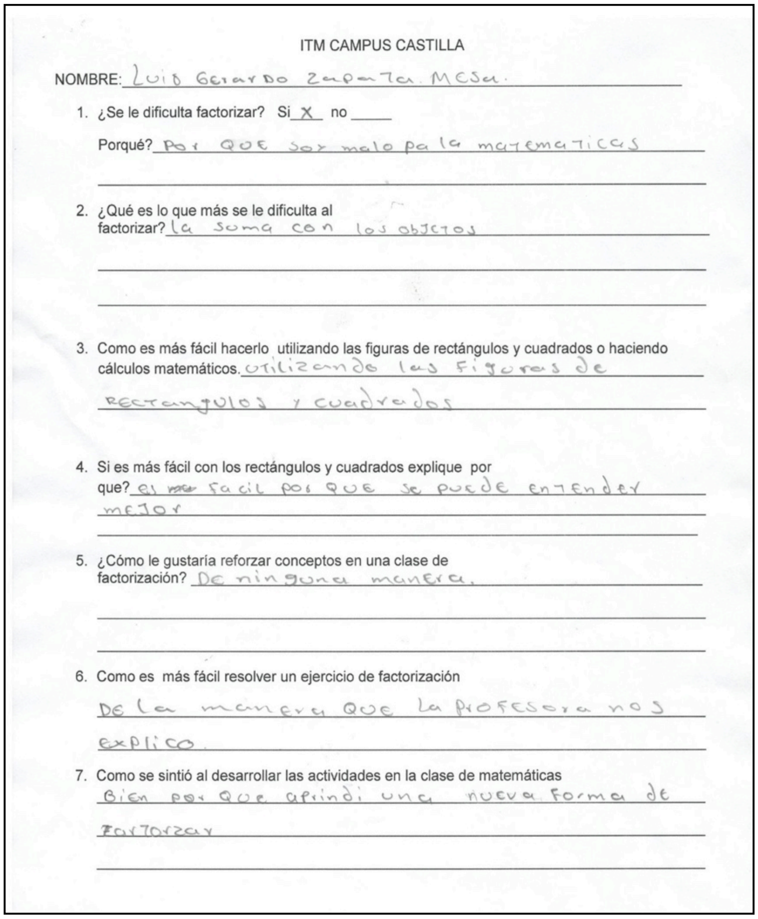



**Ilustración 19 :** Respuesta C3 a la actividad 9 y 10 factorizar expresiones algebraicas

El mismo estudiante manifiesta su motivación en la solución de la guía didáctica al evaluar la experiencia vivida en dicha investigación.



ITM CAMPUS CASTILLA

NOMBRE: Luis Gerardo Zapata Mesa.

1. ¿Se le dificulta factorizar? Si X no ____

   Porqué? Por QUE soy malo pa la matematicas

2. ¿Qué es lo que más se le dificulta al factorizar? la suma con los objetos

3. Como es más fácil hacerlo utilizando las figuras de rectángulos y cuadrados o haciendo cálculos matemáticos. utilizando las figuras de rectangulos y cuadrados

4. Si es más fácil con los rectángulos y cuadrados explique por que? es ~~mas~~ facil por QUE se puede entender mejor

5. ¿Cómo le gustaría reforzar conceptos en una clase de factorización? De ninguna manera.

6. Como es más fácil resolver un ejercicio de factorización

   De la manera QUE la profesora nos explico.

7. Como se sintió al desarrollar las actividades en la clase de matemáticas

   Bien por QUE aprendi una nueva forma de factorizar

**Ilustración 20:** Evaluación de la guía didáctica por C3

# Capítulo 5

## Conclusiones

Los resultados obtenidos estarán relacionados con la motivación y el aprendizaje significativo del concepto de factorizar una expresión algebraica usando el álgebra geométrica.

Al evaluar la motivación de los estudiantes por el aprendizaje generado al aplicar la guía didáctica, surgen las siguientes preguntas:

- ¿Puede el material didáctico presentado por el docente mejorar el desarrollo de la clase, generando un mejor aprendizaje de los conceptos matemáticos por parte del estudiante?
- ¿Se puede creer que la motivación de los estudiantes hacia el aprendizaje haya mejorado el rendimiento académico sobre factorización, con el uso del álgebra geométrica usando rectángulos y cuadrados?
- Al utilizar el material concreto para el desarrollo de la guía, ¿puede este permitir un aprendizaje significativo de la factorización?

Al analizar las respuestas de los estudiantes cuando se realizaron todas las actividades propuestas, se evidenció como al trabajar con material didáctico para aprender a factorizar los procesos de razonamiento eran mas sencillos y entretenidos. Al interpretar conceptos matemáticos que a simple vista son complejos y aburridos; con el uso de la guía didáctica se pudo demostrar que el lenguaje y los procesos que se veian complejos ya no lo eran para los estudiantes.

Además, es interesante ver como esta actividad favorece el trabajo en grupo, mejora las relaciones entre estudiantes, hay trabajo colaborativo y respeto por sus compañeros, mejora las relaciones entre maestro y estudiante, el ambiente de la clase es agradable permitiendo la optimización de los procesos de aprendizaje.

Se pudo comprobar que el aprendizaje significativo se obtiene al combinar lo abstracto con lo lúdico (guía didáctica), pudimos ver como al desarrollar una serie de expresiones algebraicas (factorizar) en forma tradicional, dando una explicación paso a paso de los procesos aritméticos según el caso, se puede plasmar en una figura geométrica como es el cuadrado y el rectángulo, y explicarlo mediante hallar el valor del área de esa figura.

La guía didáctica desarrollada se puede considerar como una nueva estrategia metodológica en la enseñanza de la factorización y en especial para estudiantes que presenten dificultades en este aprendizaje.

Este método busca un aprendizaje más visual usando herramientas concretas construidas por los mismo estudiantes, donde recortaron y formaron con esas figuras cuadrados o rectángulos, donde el área de estas eran la factorización del ejercicio propuesto.

Se demostró como al utilizar los cuadrados y rectángulos los estudiantes del CLEI IV del ITM Campus Castilla lograron la asimilación de varios casos de factorización de forma satisfactoria.

Cuando los conceptos se relacionan unos con otros, permiten mejores aprendizajes en los estudiantes, es decir, todos los conocimientos previos y los recién adquiridos juegan un papel muy importante en la resolución de las situaciones, de tal manera que los conocimientos no se dan fragmentados sino como un todo.

Se deja como pendiente del trabajo de grado, construir una guía didáctica para la enseñanza de expresiones algebraicas que dan cuenta de un volumen, en la cual el concepto de área y la enseñanza de factorización son los subsumidores necesarios para la aprehensión de dicho concepto.

**Bibliografía**


(MEN), M. d. (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas.* Colombia.

Ausubel, D. P. (1960). El uso de organizadores previos en el aprendizaje y la retención de material verbal significativo. *Revista de psicología de la educación , 51*, 267-272.

Ausubel, D. P. (1976). *Psicología educativa: Un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.

Ballén Novoa , J. O. (2012). *El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado.* Universidad Nacional, Facultad de Ciencias, Colombia.

Barriga Arceo, F. D., & Hernandez Rojas, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista.* México: McGraw-Hill.

Blanco Nieto, L. J. (1996). Aprender a enseñar geometría. Una experiencia en la formación inicial del profesorado en primaria. *Épsilon , 1* (34), 47-58.

Cobo Granda , E. A. (2008). *Una propuesta para el apre ndizaje significativo de los estudiantes de la escuela San Jo sé La Salle, de la ciudad de Guayaquil.* Universidad Andina Simón Bolívar Sede Ecuador, Educación, Guayaquil.

Córdoba Gómez, F. (2006). La evaluación de los estudiantes: una discusión abierta. *Revista Iberoamericana de Educación , 39* (4).

Covas, M. C., & Bressan, A. (2011). *LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA Y LOS MODELOS DE ÁREA.* Recuperado el 2015, de gpdmatematica: http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/algebrageometricacovas3.pdf

Ertmer, P. A., & Newby, T. J. (1993). Conductismo, cognitivismo y constructivismo: Una comparación de los aspectos críticos desde la perspectiva del diseño de instrucción. *Performance Improvement quarterly , 6* (4), 50-72.

García Hernandez , I., & de la Cruz, G. d. (2014). Las guías didácticas:recursos necesarios para el aprendiz autónomo. *Edumecentro , 3* (6), 162-175.

Godino, J., & Font, v. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* Granada.

Godino, J., Font, v., & Batanero, C. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Granada: Universidad de Granada.

López Hernández, E. (2008). *PRODUCTOS NOTABLES, FACTORIZACIÓN Y ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA, UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL BACHILLERATO DEL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES.* UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN, México.

Melo Sánchez, S. D. (2006). *Motivación, aprendizaje significativo y rendimiento en matemáticas a través de las TIC investigación en estudiantes del grado séptimo de la inmaculada concepción.* Campus virtual UdeS, Maestría en gestión de la tecnología educativa.

Pérez de Diaz, M. C. *Serie material didático, álgebra desde una perspectiva geométrica.* Universidad Nacional.

Rodriguez Moneo, M. (2009). Motivar para aprender en situaciones académicas. México.

significativo, L. c. (1997). Obtenido de http://www.campus- oei.org/equidad/rioseco3.PDF

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudios de casos.* Madrid: Morata.

Valenzuela Molina, M., & Ruiz López, F. (2012). *Uso de materiales didácticos manipulativos para la enseñanza y aprendizaje de la geometría.* Granada: Universidad de Granada.

Velasco Esteban, E. (2012). *USO DE MATERIAL ESTRUCTURADO COMO HERRAMIENTA DIDÁCTICA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.* Universidad de Valladolid.

Villa Ochoa, J. A., Bustamante Quintero, C. A., Berrio Arboleda, M. D., Osorio Castaño, J. A., & Ocampo Bedoya, D. A. (julio). Sentido de realidad y modelación matemática: El caso Alberto. *ALEXANDRIA revista de educación en ciencia y tecnología , 2* (2), 159-180.

Vivas, J. (s.f.). Módulos de memoria semántica. Universidad nacional de mar de plata.

**Anexos**

ACTIVIDAD No. 1

ITM CAMPUS CASTILLA

CLEI IV

NOMBRE:______________________________________________________________

Años cumplidos: _________________Sexo: ____________________Estrato Social:___________

Ocupación:______________________________________________________________

Materia que más le agrada:

________________________________________porqué?______________________________

______________________________________________________________________________

Materia que más se le dificulta:

________________________________________porque?______________________________

______________________________________________________________________________

Qué es una ciencia exacta:______________________________________________________________

______________________________________________________________________________

Cuáles son las ciencias exactas

______________________________________________________________________________

ACTIVIDAD No.2

ITM CAMPUS CASTILLA

FECHA: _______________

NOMBRE:___________________________________________________________________

Señale con una X la respuesta que usted considere correcta.

1. ¿Cómo le gustaría reforzar conceptos en una clase de factorización?

El profesor debe ser muy dinámico

Utilizando las nuevas tecnologías para su explicación

Realización de ejercicios en forma interactiva

Utilización de material didáctico para la realización de los ejercicios

1. ¿Las metodologías usadas en las clases de matemáticas son las adecuadas?
No, las clases son monótonas

No, las nuevas tecnologías no se aplican

Si, por

que___________________________________________________________________________

________________________________________

3. ¿Cómo le gustaría reforzar los conceptos en una clase de matemáticas?

Dinámica y amena por parte del profesor

Utilizar las nuevas tecnologías

Realizar ejercicios en forma interactiva, utilizando material didáctico

Todas las anteriores

4. ¿Qué temas le da más dificultad en el área de las matemáticas
   a) Reconocer áreas de figuras geométricas
   b) Operaciones con números enteros
   c) Realizar operaciones con números y letras
   d) Operaciones con potencias
   e) Todas las anteriores

5. De las siguientes expresiones, ¿cuál es la correcta?
    a) $-2+(3^2+5) = 12$
    b) $(5+3)^2 = 64$
    c) $(3^2+5^2) = 34$
    d) Todas las anteriores

6. El área del rectángulo cuya base mide 5 m y la altura 7m. es?
    a) 35 $m^2$
    b) 12 $m^2$
    c) 2 $m^2$
    d) Ninguna de las anteriores

7. La expresión $5^2 + 7^2$ es igual a:
    a) 10+14
    b) 25+49
    c) $(5+7)^2$
    d) Ninguna de las anteriores

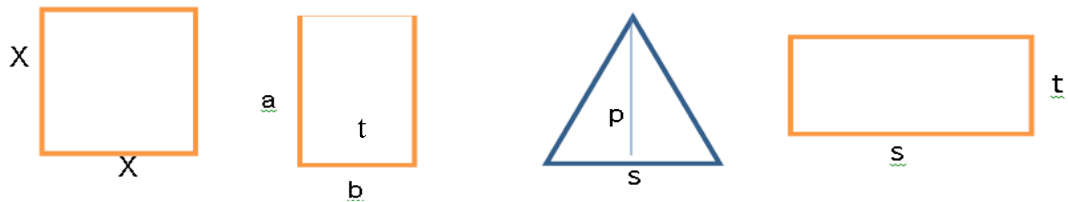
ACTIVIDAD No.3

**EXAMEN DIAGNOSTICO**

**NOMBRE**______________________________________________

CLEI :

1. Escriba una expresión para calcular el área de las siguientes figuras




A =____________ A =_________ A = ___________ A = ___________

2. Cuál de las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y por qué
   a) $(X+18)(X-10) = x^2+8x-180$__________________________________
   b) $(a+b)^2 = a^2+b^2$ ________________________________________________________

   c) $(a+b)(a-b) = a^2+b^2$

3. Una ecuación de segundo grado ¿cuántas soluciones puede tener? Justifica su respuesta______________________________________________________________________
   ______________________________________________________________________________
   _______________________________________

4. Encuentra el valor de X, justifica su respuesta si no es posible encontrarlo

   a) $X+7= 2$
   b) $X^2-36=0$
   c) $2x^2+32=0$
   d) $3(x-2)=9$
   e) $3x+2=0$
5. El producto de: $6(3+4)$ es:

6. El producto de: $(2+3)(6-2)$ es:

7. Explica con tus palabras que es factorizar:____________________________________________________________________
   ________________________________________________________

ACTIVIDAD No. 4

**NOMBRE**____________________________________________________

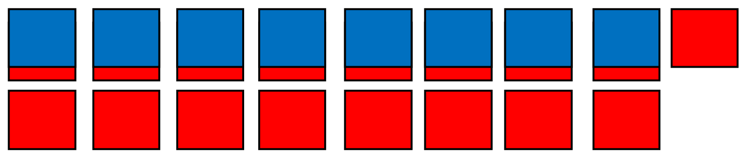
CLEI : ______________ fecha: ________________________________________

**Subsumidor 1: Agrupación de números enteros**

**Objetivo:** agrupación de números enteros (suma y resta), utilizando los cuadros rojos y azules

Realiza las siguientes agrupaciones y al frente de la operación matemática coloca los cuadros, como se le indica (los cuadros rojos representan los números negativos y los azules los positivos)

1. -12+8-5 = -9



2. 10+(-4)+6+3=
3. 20+15+(-12)=
4. 30+(-50)+5=
5. 18+(-15)+(-9)=
6. 70+(-30)+(-40)=
7. 12+(-7)+20=
8. 15+30+(-10)=
9. 40+30+(-60)=
10. 38+12+(-20)

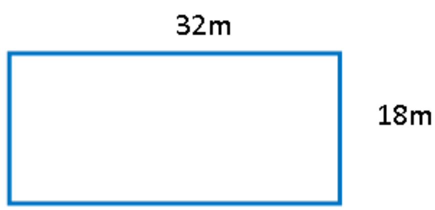
ACTIVIDAD No. 5

**NOMBRE**__________________________________________________

**Subsumidor 2: área de rectángulos y triángulos**

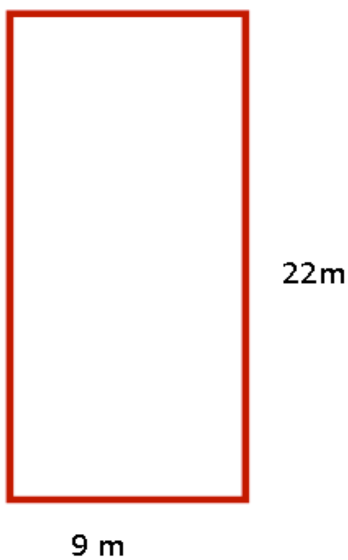
**Objetivo:** hallar el área de las siguientes figuras geométricas

*1)*

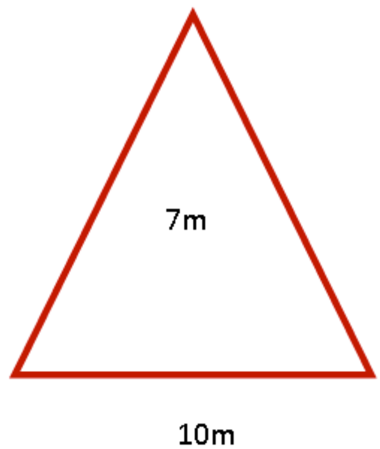



*2)*


*3)*




4)




**Respuestas**

**1:**________________

**2:**________________

**3:**________________

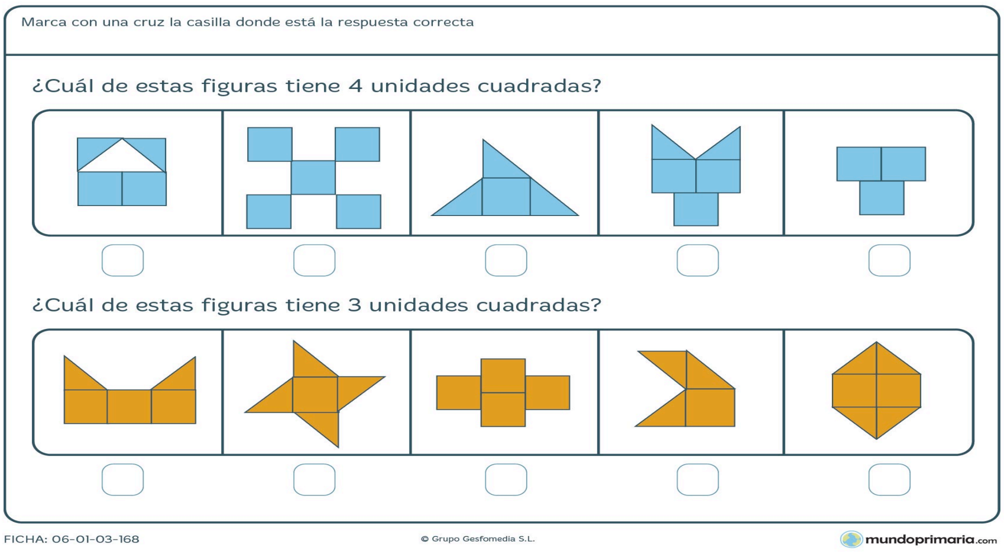
**4:**________________

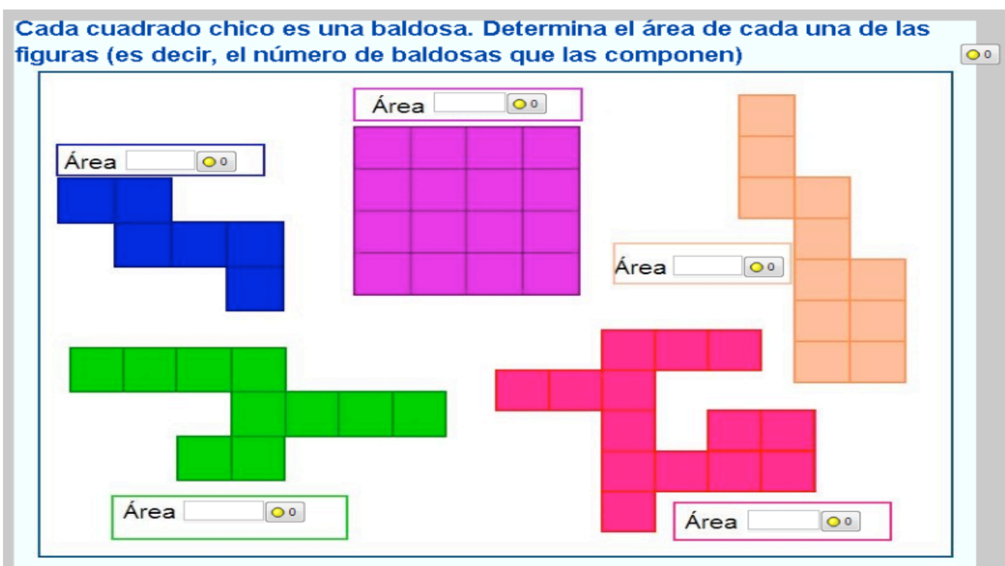
ACTIVIDAD No. 6

**NOMBRE**__________________________________________________

**Subsumidor 3 : unidad cuadrada y aplicaciones**

**Objetivo:** identificar la unidad cuadrada de las siguientes figuras y hallar el área




Tomado de: https://www.google.com.co/imgres?imgurl=http://www.mundoprimaria.com/wp-content/uploads/2014/08/Ficha-de-unidades-cuadradas-para-ni%2525C3%2525B1os-de-primaria.jpg&imgrefurl=http://www.mundoprimaria.com/fichas-para-ninos/ficha-de-unidades-cuadradas-para-ninos-de-primaria&h=1240&w=1754&tbnid=4fMfvkPa_ThBrM:&docid=eeWNQ3vx1uRYsM&ei=fv6FVtnFO4PMmwGagZXwBg&tbm=isch&ved=0ahUKEwjZ_LO04YfKAhUD5iYKHZpABW4QMwgcKAEwAQ

ACTIVIDAD No. 7

CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS (RECTANGULOS Y CUADRADOS)

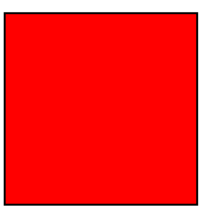
**Logro:** Identificar y construir modelos físicos de cuadrados y rectángulos Áreas, perímetros y volúmenes

MATERIALES: Tijeras, papel fomy o cartulina plana de los siguientes colores: azul, rojo, amarillo, negro, verde y rosa, bisturíes, regla, escuadra.

**Recortar las siguientes figuras:**

**4** cuadrados de 13 cm * 13 cm de color azul

**4** cuadrados de 8 cm * 8 cm de color rojo

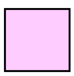


**4** rectángulos de 13 cm * 8 cm de color amarillo

**15** rectángulos de 13 cm * 2cm de color negro

**15** rectángulos de 8 cm * 2cm de color verde

**70** cuadrados de 2cm * 2cm de color rosado



## CONSTRUCCIÒN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

ACTIVIDAD No. 8

**Objetivo:** factorizar las siguientes expresiones en términos de base por altura y verificar que figura se forma utilizando los rectángulos y cuadrados ***(a = x; b = y)***

| **Áreas** | **Áreas del rectángulo formado** | **Área en términos de la base y la altura** | **Que figura se forma** |
|---|---|---|---|
| $a^2$, ab | $a^2 + ab$ | A = a( a + b) | |
| 1, $a^2$, $2^a$ | | | |
| 4b, $b^2$, 3 | | | |
| | $7a + a^2 + 6$ | | |
| | $2 + 5a + 2a^2$ | | |
| | $4a^2 + 4a + 1$ | | |
| $a^2$, $b^2$ | | | |
| 3, $2a^2$, 5a | | | |
| 5b, 6, $b^2$ | | | |
| 2b, $a^2$, ab, 4a 4 | | | |
| | | A = (b + 1)(a + 2b) | |
| | | A = b(b + 1) | |
| | | A = (a + b)(a + 3) | |
| 2ab, $b^2$, $a^2$ | | | |
| 6, 2ab, 3b, 4a | | | |
| | | A = (a +3)(a + 3) | |
| | | | |
| | $b^2 + 7a + 12$ | | |
| | $a^2 – 2ab + b^2$ | | |
| | $a^2$ - a - 6 | | |
| | | A= (a - 1)(b +2) | |
| | | A = (2a + 1)(b - 2) | |
| 1, -4a, $4a^2$ | | | |
| $a^2$, $-b^2$ | | | |

Guías didácticas. Propuesta de cualificación de docentes para la implementación de aulas de laboratorio para matemáticas pag. 116 Galileo. Tomo 10

ACTIVIDAD No. 9

**NOMBRE**____________________________________________________

CLEI : ______________ fecha: ________________________________________

Objetivo: resolver las expresiones algebraicas y utilizar los rectángulos y cuadrados para mirar que figura se forma.

1- Hallar el factor común de:

a) $8x^2+32x$
b) $10x^2+5x+20x$

2- Factorarizar

a) $(a+1)^2$
b) $(b+3)^2$
c) $(a+b)(a+3)$

3- Resuelve los paréntesis y justifique su respuesta

d) $(2a+1)(2a+1)$
e) $(a+3)(a+3)$
f) $(a-2)(a+3)$

4- Factorariza el trinomio y explique con tus palabras su respuesta

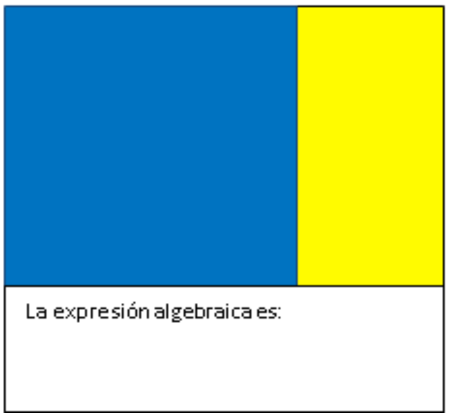
a) $b^2+7b+12$
b) $2a^2+5a+2$

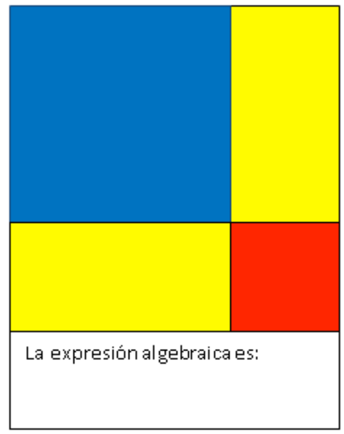
**Actividad No. 10**

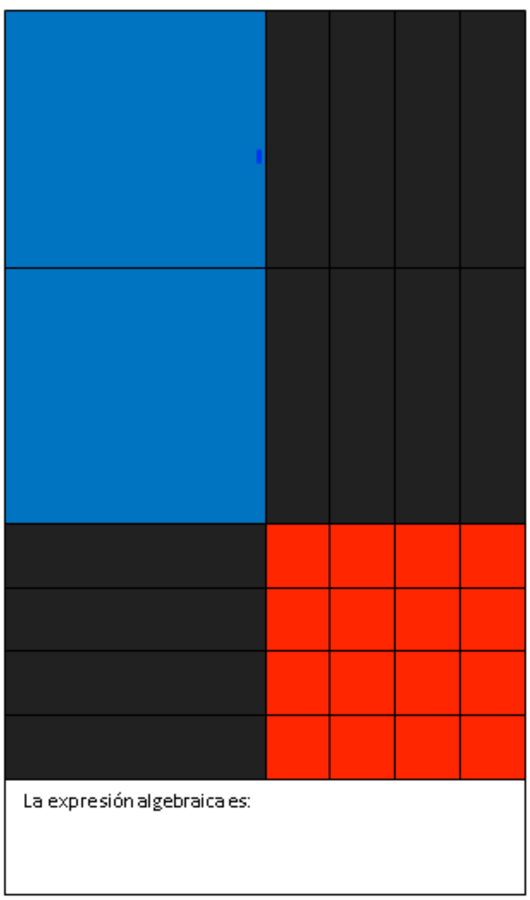
**EXPRESAR EL AREA DE LAS FIGURAS (PRODUCTOS-DIMENSIONES DE SUS LADOS)**

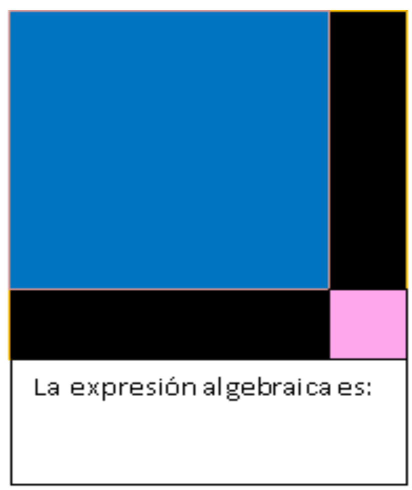
**Logro:** Construir expresiones algebraicas desde la representación geométrica.

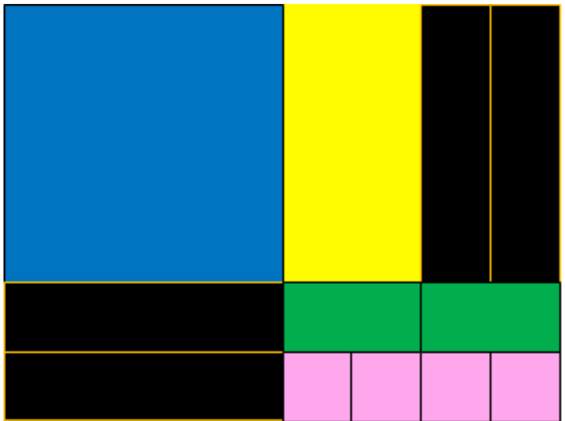
Hallar los términos que se encuentran en las áreas representadas gráficamente.



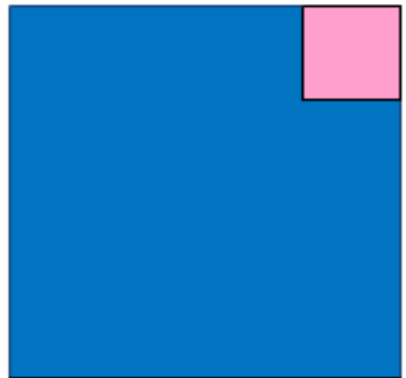



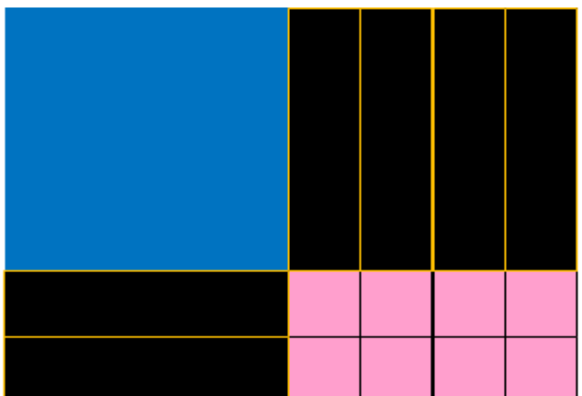





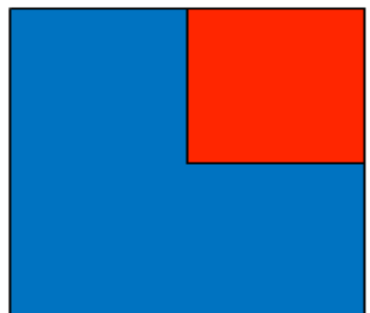
La expresión algebraica es:



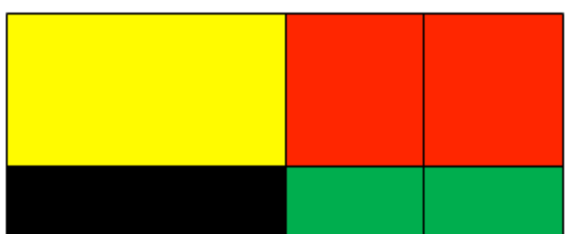
La expresión algebraica es:



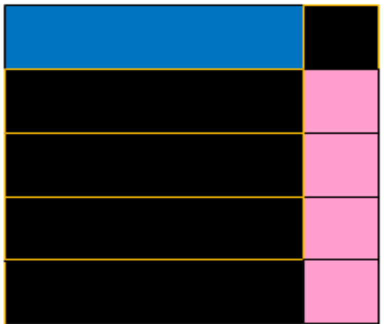
La expresión algebraica es:



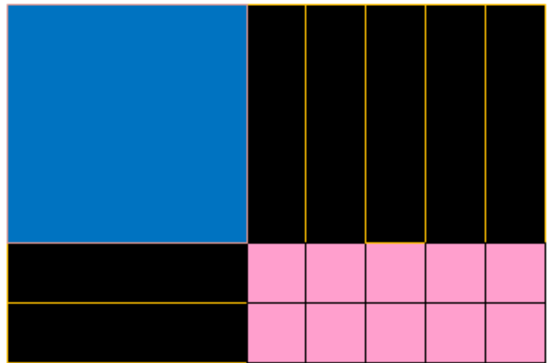
La expresión algebraica es:



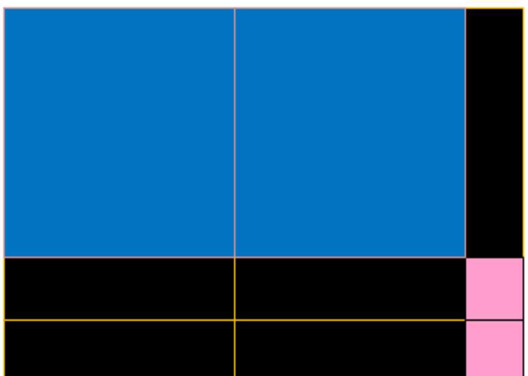
La expresión algebraica es:



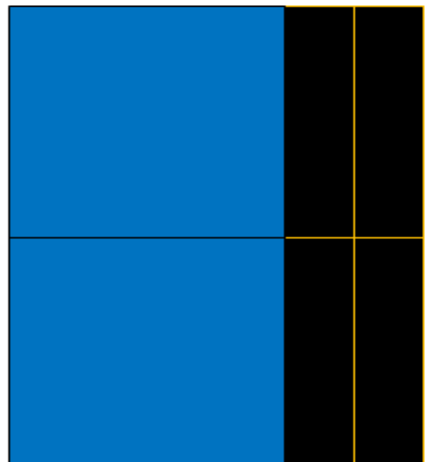
La expresión algebraica es:



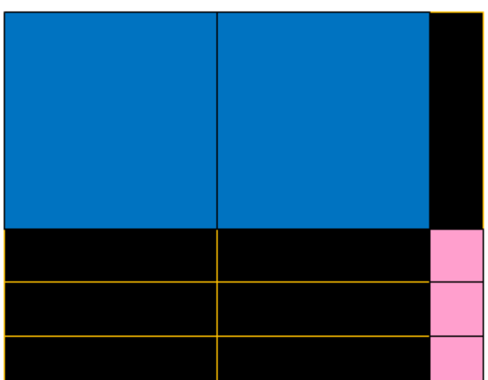
La expresión algebraica es:



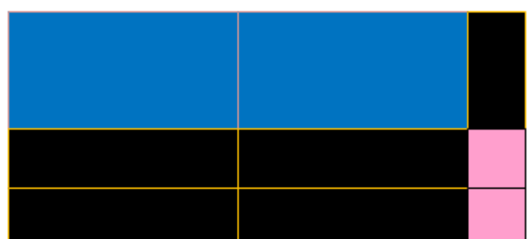
La expresión algebraica es:



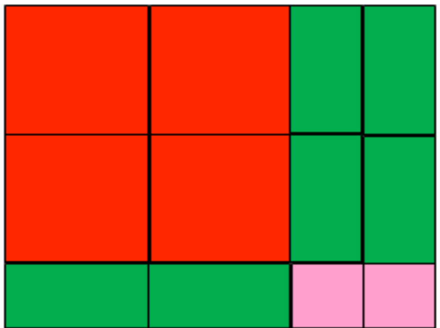
La expresión algebraica es:



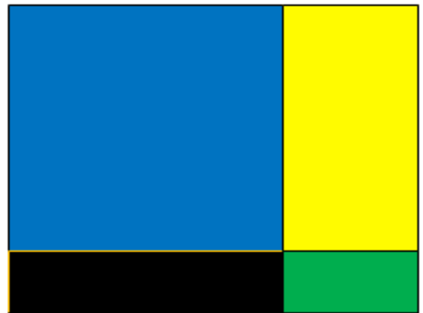
La expresión algebraica es:



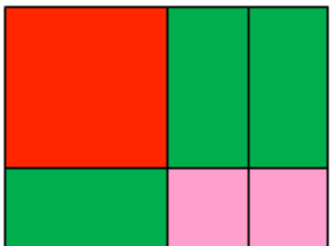
La expresión algebraica es:



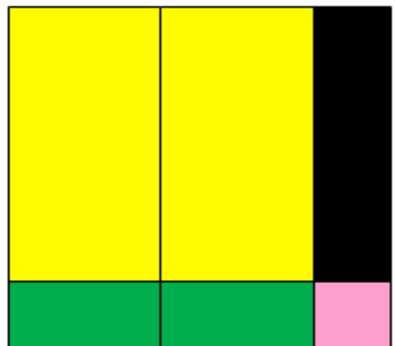
La expresión algebraica es:



La expresión algebraica es:



La expresión algebraica es:



La expresión algebraica es:

La expresión algebraica es: